

Partie I

I.A.1. Posons $\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ \theta \in [0, \pi] \end{cases}$

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], f_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} (\operatorname{Re}(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \cos^{n-k}(\theta) i^k \sin(\theta)^k \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (-1)^k \sin(\theta)^{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta) (-1)^k (1 - \cos^2(\theta))^k \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k \right). \text{ Donc :} \end{aligned}$$

f_n est une application polynômiale à coefficients réels. C'est une somme de termes de degré n et son

coefficient dominant est $\frac{\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k}}{2^{n-1}} \neq 0$, donc f_n est de degré n .

I.A.2. D'après ce qui précède, $T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k \right)$ et $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$

Le coefficient dominant de T_n est d'après la question précédente, $\frac{\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k}}{2^{n-1}}$.

Or $\begin{cases} (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \\ (1-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \end{cases}$. En additionnant membre à membre, on obtient $\sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} = 2^{n-1}$

et :

$$\boxed{T_n = X^n + R_n \text{ avec } d^\circ R_n \leq n-1.}$$

I.A.3. $T_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq 1} C_1^{2k} x^{1-2k} (x^2 - 1)^k \Rightarrow$

$$\boxed{T_1 = X}$$

$T_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq 2} C_2^{2k} x^{2-2k} (x^2 - 1)^k \right) = \frac{1}{2} (X^2 + X^2 - 1) \Rightarrow$

$$\boxed{T_2 = X^2 - \frac{1}{2}}$$

$T_3 = \frac{1}{2^2} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq 3} C_3^{2k} x^{3-2k} (x^2 - 1)^k \right) = \frac{1}{4} (X^3 + 3X(X^2 - 1)) \Rightarrow$

$$\boxed{T_3 = X^3 - \frac{3}{4}X}$$

$T_4 = \frac{1}{2^3} \left(\sum_{0 \leq 2k \leq 4} C_4^{2k} x^{4-2k} (x^2 - 1)^k \right) = \frac{1}{8} (X^4 + 6X^2(X^2 - 1) + (X^2 - 1)^2) \Rightarrow$

$$T_4 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8}$$

I.A.4. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall x \in [-1, 1],$ posons $\theta = \arccos(x)$. On a alors :

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \Rightarrow$$

$$2^n f_{n+1}(x) + 2^{n-2} f_{n-1}(x) = 2^n f_n(x) x \Rightarrow$$

$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) - 2P_n(x)x = 0$. D'où le polynôme $P_{n+1} + P_{n-1} - 2XP_n$ possède une infinité de racines et est donc nul :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$$

I.A.5. Résolvons $f_n(x) = 0$.

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arccos(x) = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ et } \frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ et } k \in \{1, \dots, n\}$$

La fonction \cos étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$, f_n possède n racines 2 à 2 distinctes.

Or $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow P_n(x) = 0$. Donc :

$$\text{les racines de } P_n \text{ sont les } x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ où } k \in \{1, \dots, n\}$$

et elles sont 2 à 2 distinctes.

I.A.6. L'on a $\forall x \in [-1, 1], |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Résolvons $|f_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow |\cos(n \arccos(x))| = 1$

$$\Leftrightarrow n \arccos(x) = 0 [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n\}, x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right). \text{ Posons } x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Alors il existe $n+1$ points x'_k 2 à 2 distincts où la fonction f_n atteint un extrémum absolu. En outre

$$f_n(x'_k) = f_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi)$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}. \text{ D'où :}$$

$$\rightarrow \text{si } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ et } k \text{ est pair, } f_n \text{ atteint un maximum absolu égal à } \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\rightarrow \text{si } k \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ et } k \text{ est impair, } f_n \text{ atteint un minimum absolu égal à } -\frac{1}{2^{n-1}}$$

I.A.7. La procédure R est récursive et $R(n)$ donne le n -ième polynôme P_n .

$> R := \text{proc}(n)$ local $A;$

if $n = 0$ then $A := 1$ else if $n = 1$ then $A := X$ else $A := 2 * X * R(n - 1) - R(n - 2)$ fi fi;
 expand(A);
 end;

Affichage des 5 premiers polynômes P_n en posant $P_0 = 1$.

> for i from 0 to 4 do $P[i] = R(i)$ od;

$$\begin{aligned} P[0] &= 1 \\ P[1] &= X \\ P[2] &= 2X^2 - 1 \\ P[3] &= 4X^3 - 3X \\ P[4] &= 8X^4 - 8X^2 + 1 \end{aligned}$$

I.B.1. $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Sa représentation est le segment $[A, B]$ avec $A(-1, -1)$ et $B(1, 1)$.

$f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Sa représentation est une partie de parabole d'axe (Ox) et de sommet le point de

$$x \rightarrow x^2 - \frac{1}{2}$$

coordonnées $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

$f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. f_3 est C^∞ sur $[-1, 1]$, impaire et $\forall x \in [-1, 1]$,

$$x \rightarrow x^3 - \frac{3}{4}x$$

$$f'_3(x) = 3 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 3 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

$f_4 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. f_4 est C^∞ sur $[-1, 1]$, paire et $\forall x \in [-1, 1]$,

$$x \rightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$$

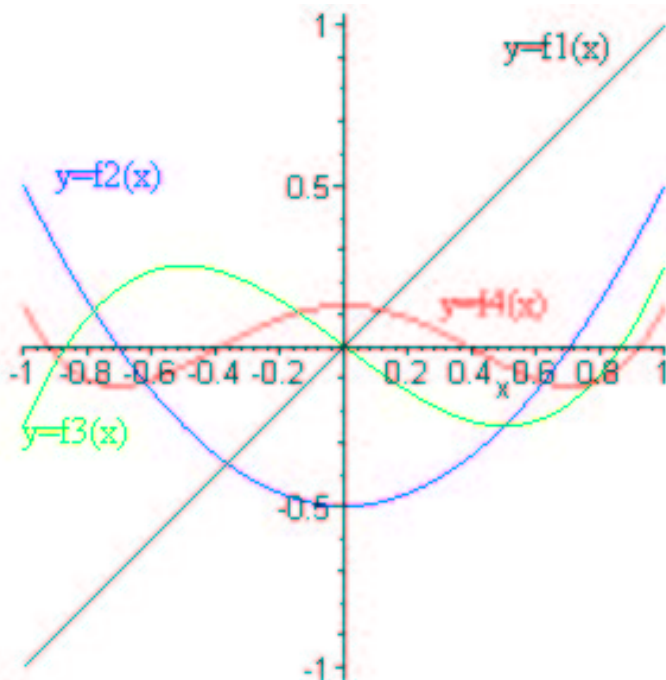
$$f'_4(x) = 4x^3 - 2x = 4x \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4x \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

D'où les tableaux de variations :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'_3(x)$	-	0	+
$f_3(x)$	0	$\searrow -\frac{1}{4}$	$\nearrow \frac{1}{4}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	
$f'_4(x)$	0	-	0	+
$f_4(x)$	$\frac{1}{8}$	$\searrow -\frac{1}{8}$	$\nearrow \frac{1}{8}$	

et les courbes représentatives :



I.B.2. L'on a vu dans I.A.6. que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Soit P polynôme unitaire de degré n et $R_n = T_n - P$; alors $d^\circ R_n \leq n - 1$. Sous les notations de I.A.6., l'on sait que pour $x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, \dots, n\}$, T_n admet $\frac{1}{2^{n-1}}$, maximum absolu pour k pair et $-\frac{1}{2^{n-1}}$, minimum absolu pour k impair.

Supposons que $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

On a alors pour k pair $R_n(x'_k) = T_n(x'_k) - P(x'_k) > 0$ et pour k impair, $R_n(x'_k) = T_n(x'_k) - P(x'_k) < 0$. Comme R_n est une fonction continue sur $[-1, 1]$, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\exists c_k \in]x'_{k+1}, x'_k[$ tel que $R_n(c_k) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Les x'_k formant une suite strictement décroissante de $[-1, 1]$, R_n possède donc au moins n racines distinctes : c_0, \dots, c_{n-1} . Comme $d^\circ R_n < n$, $R_n = 0$, ce qui prouve que $P = T_n$, ce qui est impossible puisque $\sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \neq \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$. Donc :

Il n'existe pas de polynôme P de degré n , unitaire, tel que $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

I.B.3. D'après la question précédente, si P est un polynôme unitaire de degré n , $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$. Donc :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x)| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$$

I.B.4. Notons $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ et $f \in E$.

$] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $] -1, 1[$

$$x \rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

En outre, f est bornée sur $[-1, 1]$ (car continue sur cet intervalle) et $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in]-1, 1[$, $\left| \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}}$. Comme $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ converge (et vaut π),

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ converge}}$$

I.B.5.

a) Notons $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

φ est bien définie d'après I.B.4. appliquée à fg qui appartient à E .

φ est évidemment bilinéaire, le produit dans \mathbb{R} l'étant et l'intégrale étant linéaire.

φ est évidemment symétrique, le produit dans \mathbb{R} l'étant.

Soit $f \in E \setminus \{0\}$:

$$\rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0 \text{ (intégrale d'une fonction positive)}$$

$$\rightarrow \text{si } \int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \text{ comme } x \rightarrow \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est continue sur }]-1, 1[\text{ et positive,}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) = 0 \text{ (car } f \text{ est continue sur } [-1, 1]). \text{ Donc : } \int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx > 0$$

On a montré que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

$$\text{b) On a alors } \forall m, n \in \mathbb{N}^*, \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Effectuons le changement de variables $t = \arccos(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos(t) \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$, ce qui est possible car $t \rightarrow \cos(t)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(nt) \cos(mt)}{\sin(t)} (-\sin(t)) dt = \int_0^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} \cos((m+n)t) dt + \int_0^{\pi} \cos((m-n)t) dt \right). \text{ D'où 2 cas :} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{si } m = n > 0, \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi} \cos(2nt) dt + \int_0^{\pi} dt \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \text{si } m \neq n, \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m+n)t)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right]_0^{\pi} = 0.$$

Donc, la famille $(P_n)_{n \geq 1}$ est orthogonale et pour le produit scalaire φ , $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|P_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On a montré que :

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est orthonormale}}$$

Partie II

II.A.1. d est la restriction à $E \times E$ de $P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (où P désigne le plan

$$(A, B) \rightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

affine euclidien). En identifiant P^2 à \mathbb{R}^4 grâce au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on obtient que d est continue sur E^2 comme composée d'applications continues sur leurs ensembles de définition.

(A noter que cette question est *hors-programme*, la notion de continuité n'ayant été abordée en Spé TSI qu'en un point de l'espace vectoriel normé \mathbb{R}^n)

E étant fermé, $E \times E$ est fermé (*hors-programme*).

Donc d continue sur $E \times E$, est bornée sur $E \times E$ et atteint ses bornes; d'où :

$$d_2 = \sup_{(A,B) \in E^2} d(A, B) \text{ est bien définie}$$

De même, $P^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur P^3 (*hors-programme*) et :
 $(A, B, C) \rightarrow (AB.AC.BC)^{1/3}$

$$d_3 = \sup_{(A,B,C) \in E^3} d(A, B, C) \text{ est bien définie}$$

car E^3 est un fermé (*hors-programme*)

II.A.2. $\forall (A, B, C) \in E^3, AB.AC.BC \leq d_2^3 \Rightarrow$
 $(AB.AC.BC)^{1/3} \leq d_2$; d'où :

$$d_3 \leq d_2$$

II.A.3. Soit $(A, B) \in E^2$; alors $\forall C \in E, (AB.AC.BC)^{1/3} \leq d_3 \Rightarrow$
 $\sup_{C \in E} d(A, B, C) \leq d_3$ (définition de la borne supérieure : plus petit des majorants)

D'où : $\sup_{(A,B) \in E^2} \left(\sup_{C \in E} d(A, B, C) \right) \leq d_3$.

Soit $(A, B, C) \in E^3$, alors $d(A, B, C) \leq \sup_{U \in E} d(A, B, U) \leq \sup_{(V,W) \in E^2} \left(\sup_{U \in E} d(V, W, U) \right)$

D'où : $d_3 \leq \sup_{(V,W) \in E^2} \left(\sup_{U \in E} d(V, W, U) \right)$ (définition de la borne supérieure : plus petit des majorants).

Donc :

$$d_3 = \sup_{(A,B) \in E^2} \left(\sup_{C \in E} d(A, B, C) \right)$$

II.B. On peut supposer A, B, C ordonnés sur un axe (O, \vec{i}) d'abscisses respectives x, y, z avec $0 \leq x \leq y \leq z \leq a$. On a alors :

$$AB.AC.BC = (y-x)(z-x)(y-z) = (y-x)(-z^2 + z(x+y) - xy).$$

On a alors $AB.AC.BC \leq az(a-z)$ car $y-x \leq a, z-x \leq z$ et $y-z \leq a-z$ et ces valeurs sont obtenues lorsque $x = 0$ et $y = a$. Il reste à obtenir $\sup_{z \in [0,a]} \varphi(z)$ où $\varphi : z \rightarrow az(a-z)$. Or $\forall z \in [0, a], \varphi'(z) = a^2 - 2az$

qui s'annule pour $z = \frac{a}{2}$, valeur correspondant à un maximum de φ . D'où $\sup_{(A,B,C) \in E^3} AB.AC.BC = \frac{a^3}{4}$ et

$$\sup_{(A,B,C) \in E^3} d(A, B, C) = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{II.C.1. } AB &= \sqrt{(R \cos \beta - R \cos \beta)^2 + (R \sin \beta - R \sin \beta)^2} \\ &= R \sqrt{4 \sin^2 \frac{\beta + \alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} + 4 \cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$= 2R \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \right| \sqrt{\sin^2 \frac{\beta + \alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta + \alpha}{2}}. \text{ D'où, comme } \frac{\beta - \alpha}{2} \in [0, \pi] :$$

$$\boxed{AB = 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

(On peut aussi facilement le constater sur une figure)

II.C.2. Soit $\varsigma : [\alpha, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$. ς est C^∞ sur $[\alpha, \gamma]$ et :

$$\beta \rightarrow \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \forall \beta \in [\alpha, \gamma], \varsigma'(\beta) &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} - \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} - \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2}. \text{ d'où :} \end{aligned}$$

$$\forall \beta \in [\alpha, \gamma], \varsigma'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2} = 0 \pmod{\pi}.$$

Or $\frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2} \in \left[\frac{\alpha - \gamma}{2}, \frac{\gamma - \alpha}{2} \right] \subset [-\pi, \pi]$. On a donc :

$$\begin{aligned} \varsigma'(\beta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2} = 0 \text{ ou } \left(\frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2} = \pi \text{ et } \gamma = 2\pi \text{ et } \alpha = 0 \right) \text{ ou } \left(\frac{\gamma - 2\beta + \alpha}{2} = -\pi \text{ et } \gamma = 2\pi \text{ et } \alpha = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \beta = \frac{\gamma + \alpha}{2} \text{ ou } (\alpha = \beta = 0 \text{ et } \gamma = 2\pi) \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \beta = \gamma = 2\pi) \end{aligned}$$

Dans les deux derniers cas : $\varsigma(\beta) = 0$ et la valeur de β correspond à un minimum de ς .

Dans le premier cas, ς a pour tableau de variations :

β	α	$\frac{\gamma + \alpha}{2}$	γ
$\varsigma'(\beta)$	-	0	+
$\varsigma(\beta)$	0	$\nearrow \sin^2 \frac{\gamma - \alpha}{4}$	$\searrow 0$

Donc, ς admet un maximum pour $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

II.C.3. φ est continue sur $[0, 1]$ et C^∞ sur $[0, 1[$.

$$\forall t \in [0, 1[, \varphi'(t) = 3t^2 \sqrt{1-t^2} - \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-4t^4 + 3t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-4t^2 \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(t + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\sqrt{1-t^2}}. \text{ D'où le tableau de variations :}$$

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1		
$\varphi'(t)$	0	+	0	-	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow \frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow 0$		

$$\begin{aligned} \text{II.C.4. D'après les questions II.A.3. et II.C.2., } d_3 &= \sup_{(\alpha, \gamma) \in [0, 2\pi]} \left(8R^3 \sin^2 \frac{\gamma - \alpha}{4} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \right)^{1/3} \\ &= \sup_{(\alpha, \gamma) \in [0, 2\pi]} 2^{4/3} R \left(\sin^3 \frac{\gamma - \alpha}{4} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma - \alpha}{4}} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} 2^{4/3} R (t^3 \sqrt{1-t^2})^{1/3} \text{ (car lorsque } (\alpha, \gamma) \text{ décrit } [0, 2\pi] \text{ avec } \alpha \leq \gamma, \\ \sin \frac{\gamma - \alpha}{4} \text{ décrit } [0, 1]) \\ = 2^{4/3} R \left(\frac{3\sqrt{3}}{16} \right)^{1/3} = R\sqrt{3} \text{ obtenu pour } t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ c'est à dire pour} \\ \frac{\gamma - \alpha}{4} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \gamma = \alpha + \frac{4\pi}{3}. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{d_3 = R\sqrt{3} \text{ (obtenu pour } \alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi], \beta = \alpha + \frac{2\pi}{3} \text{ et } \gamma = \alpha + \frac{4\pi}{3})}$$

Partie III

III.A.1. $[-1, 1]^{n+1} \xrightarrow{D_{n+1}} \mathbb{R}$ est continue sur $[-1, 1]^{n+1}$; elle est donc bornée (minorée par 0 et majorée par $2^{n(n-1)/2}$) et atteint ses bornes. D'où :

$$\boxed{\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [-1, 1]^{n+1}, D_{n+1} = D(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})}$$

$$\text{III.A.2. } D_{n+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} |\lambda_j - \lambda_i| \\ = |\lambda_2 - \lambda_1| |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \dots \cdot |\lambda_{n+1} - \lambda_1| \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} |\lambda_j - \lambda_i| \\ \leq |\lambda_2 - \lambda_1| |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \dots \cdot |\lambda_{n+1} - \lambda_1| \sup_{2 \leq i < j \leq n+1} D(x_2, \dots, x_{n+1}). \text{ Donc :}$$

$$\boxed{D_{n+1} \leq |\lambda_2 - \lambda_1| |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \dots \cdot |\lambda_{n+1} - \lambda_1| \cdot D_n}$$

III.A.3. On a de même $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, D_{n+1} \leq \prod_{1 \leq j \leq n+1 \text{ et } j \neq i} |\lambda_j - \lambda_i| \cdot D_n$; Multiplions membre à membre ces $n+1$ inégalités de nombres positifs. On obtient :

$$D_{n+1}^{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}} |\lambda_j - \lambda_i| \right) D_n^{n+1}. \text{ Or :} \\ \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}} |\lambda_j - \lambda_i| \right) = \prod_{(i,j) \in \{1, \dots, n+1\} \text{ et } i \neq j} |\lambda_j - \lambda_i| = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} |\lambda_j - \lambda_i| \right)^2 \text{ (chaque élément } |\lambda_j - \lambda_i| \text{ pouvant être considéré comme coefficient d'une matrice de } S_{n+1}(\mathbb{R})). \text{ D'où :}$$

$$\boxed{D_{n+1}^{n+1} \leq D_{n+1}^2 D_n^{n+1}}$$

Comme $D_{n+1} > 0$ car si x_1, \dots, x_{n+1} sont 2 à 2 distincts, $D(x_1, \dots, x_{n+1}) > 0$, on en déduit :

$$\boxed{D_{n+1}^{n-1} \leq D_n^{n+1}}$$

III.A.4. D'après la relation précédente :

$$D_{n+1}^{n-1} \leq D_n^{n+1} \Rightarrow \\ D_{n+1} \leq D_n^{(n+1)/(n-1)} \Rightarrow \\ d_{n+1} = D_{n+1}^{2/(n(n+1))} \leq D_n^{2(n+1)/(n(n-1)(n+1))} \Rightarrow \\ d_{n+1} \leq D_n^{2/(n(n-1))} = d_n.$$

Donc, la suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 et la suite (d_n) converge.

III.B1. L'on a vu en I.B.3. que $\forall P \in \mathcal{P}_n$, $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \geq \sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Donc $\mu_n = \mu(T_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et :

$$m_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

III.B.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(m_n) = -\frac{n-1}{n} \ln(2)$ qui tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\boxed{\text{la suite } (m_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{1}{2}}$$

IIIB.3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On a alors, pour $n > M$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n(n+1)} - \frac{l}{2} \right| &= \frac{1}{2} \left| \frac{2}{n(n+1)} ((u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) - l(1 + 2 + \dots + n)) \right| \\ &= \frac{1}{n(n+1)} |(u_1 - l) + 2(u_2 - l) + \dots + n(u_n - l)| \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} (|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + \dots + n|u_n - l|) \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} (|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + \dots + M|u_M - l| + (M+1)\varepsilon + \dots + n\varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{n(n+1)} \left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + \dots + M|u_M - l| + \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon \right) \quad (\text{car} \end{aligned}$$

$$M + \dots + n \leq \sum_{k=1}^n k)$$

$$\text{Or } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > N \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} (|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + \dots + M|u_M - l|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n+1)} (|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + \dots + M|u_M - l|) = 0. \text{ Donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, n > \max(M, N) \Rightarrow$$

$$\left| \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n(n+1)} - \frac{l}{2} \right| < \varepsilon. \text{ Cela montre :}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n(n+1)} = \frac{l}{2}}$$

III.C.1. Posons $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \dots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_1^k & \dots & x_{n+1}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{n+1}^k \end{vmatrix}$$

En ajoutant à la dernière ligne la combinaison linéaire $-\sum_{k=1}^n a_{k-1} L_k$ où L_k désigne la k -ième ligne,

on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \dots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(x_1, \dots, x_{n+1}). \text{ Donc :}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \dots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

III.C.2. Pour calculer d_{n+1} , on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1}$. Donc :

$$D_{n+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\lambda_j - \lambda_i) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_{n+1}^{n-1} \\ P(\lambda_1) & \dots & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix}. \text{ Or :}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_{n+1}^{n-1} \\ P(\lambda_1) & \dots & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} P(\lambda_j) (-1)^{n+1+j} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{j-1} & \lambda_{j+1} & \dots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{j-1}^{n-1} & \lambda_{j+1}^{n-1} & \dots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

En particulier, pour $P = T_n$ et en utilisant que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{j-1} & \lambda_{j+1} & \dots & \lambda_{n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{j-1}^{n-1} & \lambda_{j+1}^{n-1} & \dots & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}) \leq D_n, \text{ on a :}$$

$$D_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n+1} T_n(\lambda_j) D_n \Rightarrow$$

$$D_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}} D_n \Leftrightarrow$$

$$D_{n+1} \leq \frac{(n+1) D_n}{2^{n-1}} \text{ et comme } D_n = d_n \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } m_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ on obtient :}$$

$$\boxed{d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1) d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n}$$

II.C.3. Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in [-1, 1]$ avec $x_1 < \dots < x_{n+1}$

$$D(x_1, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \dots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} \text{ pour tout polynôme } P \text{ unitaire}$$

de degré n .

Pour $P = (X - x_1) \dots (X - x_n)$, on obtient :

$$D(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = P(x_{n+1}) D(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$$

$$P(x_{n+1}) D(x_1, \dots, x_n) \leq D_{n+1} \Rightarrow$$

$$D(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{D_{n+1}}{P(x_{n+1})}. \text{ Cela étant vrai pour tous } x_1, \dots, x_n \in [-1, 1] \text{ avec } x_1 < \dots < x_n, \text{ on a alors :}$$

$$\sup_{-1 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1} D(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{D_{n+1}}{P(x_{n+1})} \Leftrightarrow$$

$$D_n \leq \frac{D_{n+1}}{P(x_{n+1})} \Leftrightarrow$$

$P(x_{n+1}) \leq \frac{D_{n+1}}{D_n}$. Cela étant vrai pour tout $x_{n+1} \in [-1, 1]$, on a alors :

$$\sup_{x_{n+1} \in [-1, 1]} P(x_{n+1}) \leq \frac{D_{n+1}}{D_n}. \text{ Or } \sup_{x_{n+1} \in [-1, 1]} P(x_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n-1}} = m_n^n. \text{ D'où :}$$

$$m_n^n D_n \leq D_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

III.C.4. L'on sait que (d_n) est décroissante. D'où, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$m_n^n \cdot d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ car } u \rightarrow u^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{+*}. \text{ D'où :}$$

$$m_n^n \cdot d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

En divisant les 2 membres par $d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} > 0$, on obtient :

$$m_n^n \leq d_{n+1}^n \Rightarrow$$

$$\boxed{m_n \leq d_{n+1}}$$

III.C.5. La question précédente montre, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $m \leq d$ et que $d > 0$.

La question III.C.2. montre $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1) d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n$.

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+1)}{2} \ln d_{n+1} \leq \ln(n+1) + \frac{n(n-1)}{2} \ln d_n - (n-1) \ln 2 \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \ln d_{n+1} \leq \frac{2 \ln(n+1)}{2} + (n-1) \ln d_n - \frac{2(n-1)}{2} \ln 2 \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (k+1) \ln d_{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} + \sum_{k=1}^n k \ln d_k - \sum_{k=1}^n \ln d_k - \sum_{k=1}^n \frac{2(k-1)}{k} \ln 2 \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1} k \ln d_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} + \sum_{k=1}^n k \ln d_k - \sum_{k=1}^n \ln d_k - \sum_{k=1}^n \frac{2(k-1)}{k} \ln 2 \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1) \ln d_{n+1} - \ln d_1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} - \sum_{k=1}^n \ln d_k - 2n \ln 2 + \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1) \ln d_{n+1} - \ln d_1}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} - \sum_{k=1}^n \ln d_k - 2n \ln 2 + \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}}{n}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \ln d_{n+1} - \ln d_1}{n} = \ln d, 0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} \leq \frac{2 \ln(n+1)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln^2 n}{n} \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2 \ln(k+1)}{k} = 0.$$

En outre, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln d_n = \ln d$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln d_k}{n} = \ln d$ (convergence au sens de Césaro de $(\ln d_n)$)

et enfin $\ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln 2}{\ln n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où, on obtient :

$$\ln d \leq -\ln d - 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln d \leq -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{1}{2} = m. \text{ On a montré :}$$

$$\boxed{d = m = \frac{1}{2}}$$

Remarque: je n'ai pas utilisé III.B.3.

