CCP PSI 2 - 2009
Un corrigé

Partie I.

1.1. On a immédiatement

$$x_2 = 2x_1 \cos(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$$

(x_p) est récurrente linéaire d'ordre 2 et d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$. Les solutions de cette dernière sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. En posant $x_0 = 0$, la récurrence est encore valable à partir du rang 0.

- Si $\theta \neq 0[\pi]$ on a deux solutions complexes non réelles. Il existe des constantes a et b telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ x_p = a\cos(p\theta) + b\sin(p\theta)$$

Avec les données initiales, on obtient $a = 0$ (pour $p = 0$) puis $b = 1$ (pour $p = 1$). On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ x_p = \sin(p\theta)$$

- Si $\theta = 0[\pi]$ alors $x_0 = x_1 = 0$ et, par une récurrence immédiate,

$$\forall p \in \mathbb{N},\ x_p = 0$$

Les deux cas donnent ainsi le même résultat (que l'on aurait pu prouver par récurrence sans distinguer les cas).

1.2. Si $\theta \neq 0[\pi]$, $x_n = 0$ s'écrit $n\theta = 0[\pi]$ c'est à dire $\theta = 0[\pi/n]$. Comme $\theta \neq 0[\pi]$ implique aussi $\theta = 0[\pi/n]$, on a finalement

$$x_n = 0 \iff \theta = 0[\pi/n]$$

2.1. La calculatrice donne immédiatement

$$d_1(t) = 2t,\ d_2(t) = 4t^2 - 1,\ d_3(t) = 8t^3 - 4t,\ d_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1$$

2.2. Soit $n \geq 3$. Un développement par rapport à la première colonne donne

$$d_n(t) = 2td_{n-1}(t) - \Delta_{n-1}(t)$$

où $\Delta_{n-1}(t)$ est un déterminant d'ordre $n-1$ égal à $d_{n-2}(t)$ par développement par rapport à la première ligne. On a ainsi

$$\forall n \geq 3,\ d_n(t) = 2td_{n-1}(t) - d_{n-2}(t)$$

On montre alors par récurrence que la propriété

$$d_n(t) = 2^n t^n + Q_n(t) \ \text{ avec }\ Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

- C'est vrai si $n = 1$ ou $n = 2$.
- Si le résultat est vrai jusqu'à un rang $n \geq 2$, la formule précédente donne

$$d_{n+1}(t) = 2^{n+1}t^{n+1} + Q_{n+1}(t) \ \text{ avec }\ Q_{n+1} = 2XQ_n - Q_{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le résultat est ainsi vérifié au rang $n+1$.

d_n est un polynôme en t, de degré n et de coefficient dominant 2^n.

3.1. Posons $y_n = \sin(\theta)d_{n-1}(\cos(\theta))$. On a

$$\forall n \geq 3,\ y_n = 2\cos(\theta)y_{n-1} - y_{n-2} \ \text{ et } \ \begin{cases} y_2 = \sin(2\theta) \\ y_3 = \sin(3\theta) \end{cases}$$

$(y_n)_{n\geq 2}$ est donc exactement la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de la première question. On en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ d_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

3.2. $d_n(\cos(\theta)) = 0$ équivaut à $\sin((n+1)\theta) = 0$ c'est à dire à $\theta = 0[\frac{\pi}{n+1}]$. Compte-tenu de $\theta \in]0,\pi[$, les valeurs cherchées sont celles de l'ensemble

$$\left\{\frac{k\pi}{n+1} / \ k \in \{1,\dots,n\}\right\}$$

4.1. On a immédiatement

$$\chi_n(\lambda) = d_n\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$$

4.2. D'après la question 2, $\chi_n(\lambda)$ est nul quand $\lambda \in \{-2\cos(\frac{k\pi}{n+1}) / \ 1 \leq k \leq n\}$. Comme cos est injective sur $[0,\pi]$ cet ensemble possède n éléments distincts. On a donc n racines de χ_n. Comme χ_n est de degré n, on a toutes les racines de χ_n (qui est scindé à valeurs propres simples). cos étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$, les valeurs propres de $A_n(0)$ sont

$$-2\cos(\frac{\pi}{n+1}) < -2\cos(\frac{2\pi}{n+1}) < \cdots < -2\cos(\frac{n\pi}{n+1})$$

La plus grande des valeurs propres est

$$\rho_n = -2\cos(\frac{n\pi}{n+1}) = -2\cos(\pi - \frac{\pi}{n+1}) = 2\cos(\frac{\pi}{n+1})$$

4.3. Soit $\theta_n = \frac{\pi}{n+1}$ et $(x_p)_{p\geq 1}$ la suite de la question $I.1$ avec $\theta = \theta_n$. On a alors, en posant $x_0 = 0$,

$$\forall p \geq 1,\ x_{p-1} - 2x_p\cos(\theta_n) + x_{p+1} = 0$$

et aussi (question $I.1.2$) $x_{n+1} = 0$ (puisque $\theta_n = 0[\pi/(n+1)]$). Les relations précedentes pour $p = 1,\dots,n$ s'écrivent alors exactement

$$A_n(-2\cos(\theta_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

et comme $A_n(-\cos(\theta_n)) = A_n(0) - 2\cos(\theta_n)I_n$, ceci signifie que

$$(x_1,\dots,x_n) \in \ker(A_n(0) - 2\cos(\theta_n)I_n)$$

Enfin, on a $x_k = \sin(k\theta_n)$ et donc $x_1 \neq 0$. On a ainsi un vecteur non nul. Finalement,

$$\left(\sin(\frac{\pi}{n+1}), \sin(\frac{2\pi}{n+1}), \dots, \sin(\frac{n\pi}{n+1})\right)$$

est vecteur propre de $A_n(0)$ associé à la valeur propre $\rho_n = \cos(\theta_n)$. Ce vecteur a toute ses coordonnées > 0 (car $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0,\pi[$).

Partie II.

1.1. φ étant orthogonal, $\forall u,\ \|f(u)\| = \|u\|$ et ainsi $|||\varphi||| = 1$.

1.2. Soit $u = \sum u_i e_i$ tel que $\|u\| \leq 1$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\sum u_i^2 \leq 1$. De plus $\delta(u) = \sum \alpha_i u_i e_i$ et donc

$$\|\delta(u)\|^2 = \sum \alpha_i^2 u_i^2 \leq (\max \alpha_k^2) \sum \alpha_i^2 \leq \max \alpha_k^2$$

En passant à la racine carrée puis à la borne supérieure sur les u tels que $\|u\| \leq 1$, on a donc $|||\delta||| \leq \max |\alpha_k|$. Il existe j tel que $|\alpha_j| = \max |\alpha_k|$ et pour e_j (de norme 1), toutes les inégalités sont des égalités. On a donc

$$|||\delta||| = \max_{\|u\| \leq 1} \|\delta(u)\| = \max |\alpha_k|$$

1.3. Soit f auoadjoint. Il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres pour f (théorème spectral) et la question précédente s'applique alors pour donner

$$|||f||| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\lambda|$$

2.1. Il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ orthonormée et formée de vecteurs propres pour l. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondant à $f_1, \dots, f_n$, on a

$$\forall u = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i,\ \Phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2$$

Par théorèmes généraux, Φ est donc continue sur $\mathbb{R}^n$. Comme S est un compact de $\mathbb{R}^n$ (fermé et borné), Φ est bornée sur S et atteint ses bornes. On a donc l'existence de

$$\max_{u \in S} \Phi(u)$$

2.2. $v + tu$ est non nul (car par Pythagore, $\|v + tu\|^2 = \|v\|^2 + t^2\|u\|^2 = 1 + t^2 > 0$). Si on pose

$$\alpha = \|v + tu\| = \sqrt{1 + t^2}$$

on a alors $w = \frac{v+tu}{\alpha} \in S$. Pour ce α, on a (compte-tenu du caractère auto-adjoint de l)

$$\Phi(w) = \frac{1}{1 + t^2} \left(\Phi(v) + 2t(l(v)|u) + t^2 \Phi(u) \right)$$

v réalisant le maximum de Φ sur S, on a $\Phi(w) \leq \Phi(v)$ et donc

$$2t(l(v)|u) \leq t^2(\Phi(v) - \Phi(u))$$

Si $t > 0$, la division par t ne change pas le signe de l'inégalité et on obtient $(l(v)|u) \leq 0$ en faisant tendre t vers 0^+. Si $t \to 0^-$, on obtient de même $(l(v)|u) \geq 0$. Finalement,

$$(l(v)|u) = 0$$

$l(v)$ est orthogonal à tout vecteur normé de $\mathrm{Vect}(v)^\perp$ et donc à une b.o.n. de cet espace. C'est donc un élement de l'orthogonal de cet espace, c'est à dire un élément de $\mathrm{Vect}(v)$. Ceci signifie exactement que v (qui est non nul) est propre pour l.

2.3. On a $l(x) = \lambda x$ et $\|x\|^2 = 1$ ce qui donne

$$\Phi(x) = (\lambda x | x) = \lambda$$

Comme $\lambda = \Phi(x) \leq \Phi(v) = \rho$, on a montré que

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(l),\ \lambda \leq \rho$$

3.1. On a $l(x) = \sum y_i e_i$ avec $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on end éduit que

$$\Phi(x) = (l(x)|x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j x_i$$

On en déduit par inégalité triangulaire que

$$|\Phi(x)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j x_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^+ x_i^+ = \Phi(x^+)$$

3.2. D'après la question précédente, $\Phi(x) \leq \Phi(x^+)$. Par la question $II.2$, x maximise Φ et donc $\Phi(x) = \Phi(x^+)$. Mais alors la question $II.2$ donne $\Phi(x^+) = \rho$. Comme $\Phi(x^+) \geq 0$ (question précédente) on a donc $\rho \geq 0$.

4. D'après $II.3.1$, on a $|\lambda| = |\Phi(x)| \leq \Phi(x^+)$. Comme $x^+ \in S$, la question $II.2$ donne $\Phi(x^+) \leq \rho$ et ainsi $|\lambda| \leq \rho$.

5. De $l(x) = \rho x$ et $x \in S$, on tire $\Phi(x) = \rho$. Avec $II.3.2$ on a alors $\Phi(x^+) = \rho$ et comme $x^+ \in S$, $II.2$ donne $l(x^+) = \rho x^+$.
Supposons, par l'absurde, qu'il existe i tel que $x_i^+ = 0$. En regardant la coordonnée numéro i de $l(x^+) = \rho x^+$, on obtient

$$\sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^+ = 0$$

Les quantités dans la somme étant positives, on en déduit que $\forall j \neq i,\ a_{i,j} x_j^+ = 0$. De façon plus générale, en notant $I = \{i/\ x_i^+ = 0\}$, on a

$$\forall i \in I,\ \sum_{j \notin I} a_{i,j} x_j^+ = 0$$

et comme $x_j^+ > 0$ pour $j \notin I$, on a

$$\forall i \in I,\ \forall j \notin I,\ a_{i,j} = 0$$

I est non vide par l'hypothèse du raisonnement par l'absurde et $I \neq [1..n]$ car $x^+ \neq 0$. Ceci contredit alors la proposition (2) et on a

$$x^+ > 0$$

6. Soit $w = \frac{y}{\|y\|}$; on a encore $l(w) = \rho w$ et donc, avec la question précédente (utilisable car $w \in S$), $w^+ > 0$. En particulier $w_1 \neq 0$ et donc $y_1 \neq 0$.
$z = x - \frac{x_1}{y_1} y$ a une première coordonnée nulle et vérifie $l(z) = \rho z$. on vient de voir que ce n'est possible que si $z = 0$. Ainsi, deux vecteurs propres associés à ρ sont colinéaires et le sous-espace propre associé à ρ est donc de dimension 1.

7. Avec la formule de $II.3.1$, on a $0 \leq \Phi(x)$ et comme $l(x) = \lambda x$ ceci donne $\lambda \|x\| \geq 0$. Comme $\|x\| > 0$, on en déduit que $\lambda \geq 0$. On a vu qu'il existait $v > 0$ tel que $l(v) = \rho v$. Comme $x, v > 0$, on a $(x|v) > 0$ et x et v ne sont pas orthogonaux. l étant autoadjoint, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et ainsi, x et v sont dans le même sous-espace propre. On a donc $\lambda = \rho$.

8. Montrons que A vérifie les deux conditions de la partie II.
   - La condition (1) de positivité des coefficients est vérifiée.
   - Soit $I \subset [|1..n|]$ une partie non vide et différente de $[|1..n|]$; soit $J = [|1, n|] \setminus I$. I possède un minimum i. Si $i \geq 2$ alors $i - 1 \in J$ et $a_{i,i-1} = 1 \neq 0$. Sinon, $i = 1$ et il existe $j \in I$ $(j \leq n-1)$ tel que $j + 1 \notin I$ et alors $a_{j,j+1} = 1 \neq 0$ avec $j \in I$ et $j + 1 \in J$. On a donc la propriété (2).

   On constate alors que $x = \sum_{i=1}^n e_i$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. De plus, $x > 0$ et, avec ce qui précède, on peut conclure que 2 est la plus grande valeur propre de A (la seule admettant un vecteur propre > 0).