

X-ENS 2013Mathématiques A

Un corrigé proposé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques CPGE

Khouribga

Première partie :
Opérateurs sur les fonctions à support fini

1. (a) La fonction nulle est un élément de V .
Si f et g sont des éléments de V , et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\text{supp}(f + \lambda g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$, ainsi $f + \lambda g$ est un éléments de V .
- (b) Soient $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $E(f + \lambda g)(k) = (f + \lambda g)(k + 1) = f(k + 1) + \lambda g(k + 1) = E(f)(k) + \lambda E(g)(k)$, donc $E(f + \lambda g) = E(f) + \lambda E(g)$.
Si f est à support fini, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \in \text{supp}(E(f))$ si, et seulement si, $E(f)(k) \neq 0$ si, et seulement si, $f(k + 1) \neq 0$ si, et seulement si, $k + 1 \in \text{supp}(f)$, ainsi $\text{supp}(E(f)) = \{k \in \mathbb{Z} \mid k + 1 \in \text{supp}(f)\}$ qui est un ensemble fini.
On en déduit que V est stable par E .
2. Si $f \in \ker(E)$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k + 1) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = f(k - 1 + 1) = 0$ d'où $f = 0$.
Pour $g \in V$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $f(k) = g(k - 1)$, on a alors $E(f) = g$.
3. (a) Soient A une partie finie de $\mathbb{Z}$, et $(\lambda_i)_{i \in A}$ une famille de nombres complexes telles que $\sum_{i \in A} \lambda_i v_i = 0$, pour $i_0 \in A$ on a $(\sum_{i \in A} \lambda_i v_i)(i_0) = \lambda_{i_0} v_{i_0}(i_0) = \lambda_{i_0}$, donc $\lambda_{i_0} = 0$, donc la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre.
Pour $f \in V$, on pose $A = \text{supp}(f)$ partie finie de $\mathbb{Z}$, on a alors $f = \sum_{i \in A} f(i) v_i$, on en déduit que $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V .
- (b) Pour $k \in \mathbb{Z}$, $E(v_i)(k) = v_i(k + 1) = 1$ si $k = i - 1$ et 0 sinon. donc $E(v_i) = v_{i-1}$.
4. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(H \circ E)(v_i) = H(v_{i-1}) = \lambda(i - 1)v_{i-1}$ et $(E \circ H + 2E)(v_i) = E(\lambda(i)v_i) + 2v_{i-1} = \lambda(i)v_{i-1} + 2v_{i-1}$, puisque $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V , donc on a égalité si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $(\lambda(i) + 2)v_{i-1} = \lambda(i - 1)v_{i-1}$ cette dernière est vérifiée si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) - \lambda(i - 1) = -2$, si $i \geq 1$ on obtient $\sum_{k=1}^i (\lambda(k) - \lambda(k - 1)) = -2 \sum_{k=1}^i 1$, d'où $\lambda(i) - \lambda(0) = -2i$, si $i < 0$ on obtient $\sum_{k=1}^{-i} (\lambda(i + k) - \lambda(i + k - 1)) = - \sum_{k=1}^{-i} 2$, c'est-à-dire $\lambda(0) - \lambda(i) = 2i$, donc $\lambda(i) = \lambda(0) + 2i$, d'où $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$, et la formule est aussi vérifiée pour $i = 0$.
Réciproquement si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ alors $\forall i \in \mathbb{Z}$ $\lambda(i) - \lambda(i - 1) = -2$, d'où l'équivalence.
5. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $E \circ F(v_i) = \mu(i)v_i$ et $F \circ E(v_i) + H(v_i) = \mu(i - 1)v_i + \lambda(i)v_i$, puisque la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V , alors $E \circ F = F \circ E + H$ si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i)v_i = (\mu(i - 1) + \lambda(i))v_i$, si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(i - 1) + \lambda(i)$ ou encore $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) - \mu(i - 1) = \lambda(i)$, par un même raisonnement que la question précédente, on obtient $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$, réciproquement si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) = \mu(0) + i(\lambda(i) - 1) - i^2$, alors μ vérifie $\mu(i) - \mu(i - 1) = \lambda(i)$. D'où l'équivalence.

6. (a) Pour $f \in V$, posons $A = \text{supp}(f)$ qui est une partie finie de $\mathbb{Z}$, on a $f = \sum_{i \in A} f(i)v_i$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H^n(f) = \sum_{i \in A} f(i)^n v_i$ qui est un élément du sous espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i \in A}$, donc le sous espace vectoriel engendré par les $H^n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, est inclus dans le sous espace vectoriel engendré par la famille $(v_i)_{i \in A}$, qui est de dimension fini.
- (b) Soit U un sous espace vectoriel de V non réduit à $\{0\}$, stable par H , soit f un élément non nul de U , le sous espace vectoriel U' engendré par les $H^n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ est dimension fini et stable par H , considérons H' l'endomorphisme induit par H sur U' , comme U' est de dimension fini alors H' admet au moins une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$ associé à un vecteur propre $g \in U' \setminus \{0\}$, de sorte que $H'(g) = \alpha g$ ou encore $H(g) = \alpha g$. Or $g \in V \setminus \{0\}$, alors $B = \text{supp}(g)$ est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et finie. Puisque $g = \sum_{i \in B} g(i)v_i$ donc $\sum_{i \in B} \lambda(i)v_i = \alpha \sum_{i \in B} v_i$, on obtient $\forall i \in B$, $\lambda(i) = \alpha$, comme λ est injective ($\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$), cette égalité n'est vérifiée que si B est réduit à un singleton $B = \{i_0\}$, il en résulte que $g = v_{i_0} \in U'$, donc $v_{i_0} \in U$.
7. (a) $\mu(i) = 1 - i - i^2$, remarquons que l'équation $1 - X - X^2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, donc $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i) \neq 0$, donc la famille $(\mu(i)v_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V (avec un changement d'indice il s'agit de la famille $(\mu(i-1)v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$), on en déduit que F transforme une base de V en une base de V , donc $F \in GL(V)$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, $E^n(v_i) = v_{i+n} \neq v_i$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E^n \neq \text{Id}_V$, autrement dit E est d'ordre infini.
- De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, $F^n(v_i) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mu(i+k)\right)v_{i+n} \neq v_i$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^n \neq \text{Id}_V$, ainsi F est d'ordre infini.
- (c) Soit $f = \sum_{i \in A} f(i)v_i \in V$, avec $A = \text{supp}(f)$; si $f \in \ker(H)$, alors $\sum_{i \in A} \lambda(i)f(i)v_i = 0$, donc $\forall i \in A$, $\lambda(i)f(i) = 0$, ainsi $\forall i \in A$, $\lambda(i) = 0$, mais $\lambda(i) = 0$ si, et seulement si, $i = 0$, il vient que $A \subset \{0\}$, d'où $f = f(0)v_0$ ou $f = 0$, on en déduit que $\ker H$ est la droite engendré par v_0 .
- H n'est pas injective, donc pour tout $r \geq v$, H^r n'est pas injective, d'où pour tout $r \geq 1$, $H^r \neq \text{Id}_V$.
8. (a) On considère le morphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[E]$, définie par $\varphi(p) = p(E)$. φ est un morphisme d'algèbres surjectif, pour l'injectivité :
- Soit $p \in \ker \varphi$, p s'écrit sous la forme $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, donc $\varphi(p) = \sum_{k=0}^n a_k E^k = 0$, en particulier $\varphi(p)(v_n) = 0$, d'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E^k(v_n) = v_{n-k}$, on obtient $\sum_{k=0}^n a_k v_{n-k} = 0$, puisque la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre, on en déduit que les a_k sont nuls, ou encore le polynôme p est nul.
- (b) On considère le morphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[F]$, définie par, $\varphi(p) = p(F)$, c'est un morphisme surjectif, si $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est dans $\ker \varphi$, alors $\varphi(p)(v_0) = 0$, d'autre part $\forall k \in \mathbb{N}$, $F^k(v_0) = \mu(k)v_k$ (la formule est vraie pour $k = 0$, puisque $\mu(0) = 1$), on obtient $\sum_{k=0}^n a_k \mu(k)v_k = 0$, comme la famille $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre, alors

$0 \leq k \leq n$, $a_k \mu(k) = 0$, l'injectivité de l'opérateur F et le fait $\forall i \in \mathbb{Z} F(v_i) = \mu(i)v_{i+1}$, donne $\forall i \in \mathbb{Z}; \mu(i) \neq 0$, on en déduit alors que les a_k sont tous nuls, autrement dit le polynôme p est nul.

(c) Comme dans les questions précédentes, on considère $\varphi : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}[H]$, définie par $\varphi(p) = p(H)$, qui est un morphisme d'algèbres surjectif, montrons qu'il est injectif;

si un polynôme $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est dans $\ker \varphi$, alors $\sum_{k=0}^n H^k = 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}$, on a

$H^k(v_i) = \lambda(i)^k v_i$, on obtient $\forall i \in \mathbb{Z}, \sum_{k=0}^n a_k \lambda(i)^k v_i = 0$, puisque $v_i \neq 0$, alors $\forall i \in \mathbb{Z}$,

$p(\lambda(i)) = 0$, les $\lambda(i)$ sont des racines de p , ainsi le polynôme admet une infinité de racines " λ injective ", donc p est le polynôme nul.

Deuxième partie :

Intermède

9. $(q^2)^\ell = q^{2\ell} = 1$, alors q est une racine ℓ -ième de l'unité.

Soit $1 \leq r \leq \ell$, tel que $(q^2)^r = 1$, on a alors $q^{2r} = 1$, donc ℓ divise $2r$, et comme ℓ est impair alors ℓ divise r , par suite $\ell = r$.

10. (a) Pour tout $0 \leq i < \ell$, $G_a^\ell(v_i) = av_i$, donc $G_a^\ell = a \text{Id}_{W_\ell}$.

$(-1)^\ell (X^\ell - a)$ est un "le" polynôme annulateur "caractéristique" de G_a^ℓ , scindé à racine simples ($a \neq 0$), donc G_a est diagonalisable.

(b) Les valeurs propres de G_a^ℓ sont les bq^i , $0 \leq i < \ell$.

Soient $0 \leq i < \ell$ et v un vecteur propre associé à la valeur propre bq^i , alors $G_a(v) = bq^i v$, si on note par X la matrice de v dans la base $(v_0, \dots, v_{\ell-1})$, alors l'équation $G_a(v) = bq^i v$ est équivalente au système linéaire $AX = bq^i X$ où A est la matrice définie en question 10.

La résolution de ce système linéaire donne ${}^tX = \alpha((bq^i)^{-1}, (bq^i)^{-2}, \dots, (bq^i)^{-\ell})$ où $\alpha \in \mathbb{C}$, donc $\ker(G_a - bq^i \text{Id}_{W_\ell})$ est le sous espace vectoriel engendré par le vecteur ;

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} (bq^i)^{-k} v_k.$$

11. $P_a(P_a(v_i)) = P_a(a^p v_r) = a^p P_a(v_r) = a^p v_r = P_a(v_i)$, donc $P_a^2 = P_a$ ainsi P_a est un projecteur.

On a aussi $\forall i \in \mathbb{Z}, P_a(v_i) \in w_\ell$, réciproquement si $0 \leq r < \ell$, $v_r = P_a(v_r)$ donc P_a est un projecteur d'image w_ℓ .

Troisième partie :

Opérateurs quantiques

12. $(H \circ E)(v_i) = \lambda(i-1)v_{i-1}$ et $(E \circ H)(v_i) = \lambda(i)v_{i-1}$, donc l'égalité $H \circ E = q^2 E \circ H$ si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i-1) = q^2 \lambda(i)$ si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(0)q^{-2i}$.

13. Supposons que $\ker H$ est non nul, et soit $f \in \ker H$, alors $H(E(f)) = q^2 E(H(f)) = 0$, donc $E(f) \in \ker H$, le sous espace vectoriel $\ker H$ est stable par E , d'après la question 6, il contient au moins un des v_i , il existe alors $j \in \mathbb{Z}$ tel que $H(v_j) = 0$, ceci donne $\lambda(j) = 0$ (mais $\lambda(j) = \lambda(0)q^{-2j}$), on a abouti à une contradiction, donc H est injective. pour tout $i \in \mathbb{Z}, v_i \in \text{Im } H$, donc H est surjective.

14. D'abord pour $i \in \mathbb{Z}, H^{-1}(v_i) = \frac{1}{\lambda(i)} v_i$, donc l'égalité $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ à lieu si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}$ si, et seulement si, $\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}$.

15. (a) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i + \ell) = \lambda(0)q^{-2i}q^{-2\ell} = \lambda(0)q^{-2i} = \lambda(i)$ et

$$\begin{aligned}\mu(i + \ell) - \mu(i) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \mu(i + k + 1) - \mu(i + k) \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \sum_{k=0}^{\ell-1} q^{-2k} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{2k} \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \frac{q^{-2\ell} - 1}{q^{-2} - 1} - \lambda(0)^{-1} q^{2i} \frac{q^{2\ell} - 1}{q^2 - 1} = 0\end{aligned}$$

, donc $\mu(i + \ell) = \mu(i)$, les deux fonctions λ et μ sont périodiques dont ℓ est une période, donc multiple de leurs périodes.

- (b) Soit r la période de λ , on a $\lambda(r) = \lambda(0)$, donc $(q^2)^r = 1$ et comme q^2 est une racine primitive ℓ -ième de l'unité, alors ℓ divise r , et par la question précédente on déduit que $r = \ell$.
- (c) Notons s la période de μ (diviseur de ℓ avec $1 \leq s \leq \ell$), alors $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\mu(i + s) - \mu(i) = 0$, et d'autre part $\forall i \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(i + s) - \mu(i) &= \sum_{k=0}^{s-1} \mu(i + k + 1) - \mu(i + k) \\ &= \lambda(0)q^{-2(i+1)} \frac{1 - q^{-2s}}{1 - q^{-2}} - \lambda(0)^{-1} q^{2(i+1)} \frac{q^{2s} - 1}{q^2 - 1} \\ &= \lambda(0)^{-1} q^{-2(i-1)} \left(\frac{q^{2s} - 1}{q^2 - 1} \right) \left[\lambda(0)^2 q^{-2(s+1)} - q^{4i} \right]\end{aligned}$$

Comme la suite $(q^{4i})_{i \in \mathbb{Z}}$ n'est pas constante, alors $q^{2s} = 1$ et donc ℓ divise s , ceci montrer que $\ell = s$.

16. (a) $(q - q^{-1})(F \circ E + H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} = (q - q^{-1})F \circ E + (q - q^{-1})(H - H^{-1}) + q^{-1}H + qH^{-1} = C$.
- (b) $Cv_i = (q - q^{-1})(F \circ E)v_i + qHv_i + q^{-1}H^{-1}v_i = (q - q^{-1})\mu(i - 1)v_i + q\lambda(i)v_i + q^{-1}\lambda(i)^{-1}v_i = \alpha_i v_i$ où $\alpha_i = (q - q^{-1})\mu(i - 1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1}$, donc v_i est un vecteur propre associé à la valeur propre α_i .
- (c) Il suffit de montrer que la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est constante.
Pour $i \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= (q - q^{-1})\mu(i) + q\lambda(i + 1) + q^{-1}\lambda(i + 1)^{-1} \\ &= (q - q^{-1})(\mu(i - 1) + \lambda(i) - \lambda(i)^{-1}) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1} \\ &= (q - q^{-1})\mu(i - 1) + q\lambda(i) + q^{-1}\lambda(i)^{-1} = \alpha_i\end{aligned}$$

, on en déduit alors que C est une homothétie de rapport $\alpha_1 = (q - q^{-1})\mu(0) + q\lambda(1) + q^{-1}\lambda(1)^{-1} = (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$, ainsi

$$\boxed{R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}}$$

Remarque : Pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(i) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1}$$

- (d) Il s'agit de l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $z \mapsto (q - q^{-1})z + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$ qui est une bijection puisque $q - q^{-1} \neq 0$ ou encore puisque $q^2 \neq 1$.
- (e) Ici il s'agit de l'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, définie par $z \mapsto q^{-1}z + qz^{-1} + k$ où k est la constante $(q - q^{-1})\mu(0)$. Soit $Z \in \mathbb{C}$, alors l'équation $q^{-1}z + qz^{-1} + k = Z$ admet des solutions dans $\mathbb{C}^*$ si, et seulement si, l'équation $z^2 + q(k - Z)z + q^2 = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{C}^*$. Cette dernière équation admet des solutions dans $\mathbb{C}^*$ (0 n'est pas solution), donc l'application est surjective.

En calculant l'image de iq et $-iq$ on voit bien que l'application n'est pas injective.

Quatrième partie : Opérateurs quantiques modulaires

17. (a) $P_a \circ \phi \circ P_a = P_a^2 \circ \phi = P_a \circ \phi$, donc ϕ est compatible avec P_a .
- (b) Soit $i \in \mathbb{Z}$, avec $i = p\ell + r$ la division euclidienne de i par ℓ , on a
 $P_a \circ H \circ P_a v_i = P_a \circ H(a^p v_r) = a^p P_a(\lambda(r) v_r) = a^p \lambda(r) v_r$
 $P_a \circ H v_i = P_a(\lambda(i) v_i) = \lambda(i) a^p v_r = \lambda(r + p\ell) a^p v_r = \lambda(r) a^p v_r$ (λ est ℓ -périodique).
Donc H est compatible avec P_a .
De même on obtient $P_a \circ H^{-1} \circ P_a v_i = a^p \lambda(r)^{-1} v_r = P_a \circ H^{-1} v_i$, c'est-à-dire H^{-1} est compatible avec P_a .

18. D'abord $\text{Id}_V \in \mathcal{U}_q$.

Pour $\psi, \phi \in \mathcal{U}_q$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

- $P_a \circ (\phi + \lambda\psi) \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a + \lambda P_a \circ \psi \circ P_a = P_a \circ \phi + \lambda P_a \circ \psi = P_a \circ (\phi + \lambda\psi)$.
-

$$\begin{aligned} P_a \circ \phi \circ \psi \circ P_a &= [P_a \circ \phi \circ P_a] \circ \psi \circ P_a \\ &= P_a \circ \phi \circ [P_a \circ \psi \circ P_a] \\ &= P_a \circ \phi \circ [P_a \circ \psi] \\ &= [P_a \circ \phi \circ P_a] \circ \psi \\ &= P_a \circ \phi \circ \psi \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{U}_q$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(V)$.

19. Notons $i = p\ell + r$ la division euclidienne de i par ℓ .

- $(P_a \circ E \circ P_a)(v_i) = P_a(a^p v_{r-1}) = a^p P_a(v_{r-1})$;
Si $r = 0$, alors $P_a(v_{r-1}) = P_a(v_{-1}) = a^{-1} v_{\ell-1}$, donc $(P_a \circ E \circ P_a)(v_i) = a^{p-1} v_{\ell-1}$.
Et on a aussi $P_a(E(v_i)) = P_a(v_{i-1}) = P_a(v_{(p-1)\ell + \ell-1}) = a^{p-1} v_{\ell-1}$.
Si $0 < r < \ell$, c'est-à-dire $0 \leq r-1$, alors $P_a(v_{r-1}) = v_{r-1}$, donc $(P_a \circ E \circ P_a)(v_i) = a^p v_{r-1}$,
et on a aussi $P_a(E(v_i)) = P_a(a^p v_{r-1}) = a^p v_{r-1}$.
Il en résulte que $P_a \circ E \circ P_a = P_a \circ E$.
- $(P_a \circ F \circ P_a)(v_i) = a^p \mu(r) P_a(v_{r+1})$;
Si $r = \ell - 1$, c'est-à-dire $r + 1 = \ell = 1 \cdot \ell + 0$, alors $P_a(v_{r+1}) = a v_0$, puis $(P_a \circ F \circ P_a)(v_i) = a^{p+1} \mu(r) v_0$, et on a aussi $(P_a \circ F)(v_i) = P_a(\mu(i) v_{i+1}) = \mu(i) P_a(v_{(p+1)\ell}) = \mu(i) a^{p+1} v_0$,
puisque μ est ℓ périodique alors $\mu(i) = \mu(r)$, donc dans ce cas $(P_a \circ F \circ P_a)(v_i) = (P_a \circ F)(v_i)$.
Si $0 \leq r < \ell - 1$, c'est-à-dire $r + 1 \leq \ell - 1$, alors $P_a(v_{r+1}) = v_{r+1}$, et on a aussi $P_a(F(v_i)) = \mu(i) P_a(v_{i+1}) = \mu(r) P_a(v_{p\ell + (r+1)}) = \mu(r) a^p v_{r+1}$, l'égalité est vérifiée aussi dans ce cas.
D'où $P_a \circ F \circ P_a = P_a \circ F$.

20. (a) Pour $\phi \in \mathcal{U}_q$, on pose $\Psi_a(\phi) = P_a \circ \phi / W_\ell$, on a alors $\forall \phi \in \mathcal{U}_q$, $\Psi_a(\phi) \circ P_a = P_a \circ \phi / W_\ell \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a = P_a \circ \phi$.

Soit $\Psi'_a : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{L}(W_\ell)$, tel que $\forall \phi \in \mathcal{U}_q$, $\Psi'_a(\phi) \circ P_a = P_a \circ \phi$, soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ on a $\Psi_a(\phi), \Psi'_a(\phi) \in \mathcal{L}(W_\ell)$, pour $0 \leq i < \ell$, on a :
 $(\Psi'_a(\phi) \circ P_a)(v_i) = (\Psi_a \circ P_a)(v_i)$, comme $P_a(v_i) = v_i$ alors $\Psi'_a(\phi)v_i = \Psi_a(\phi)v_i$, d'où $\Psi'_a(\phi) = \Psi_a(\phi)$, on en déduit alors que $\Psi'_a = \Psi_a$.

(b) Soit $\phi \in \mathcal{U}_q$ tel que $\phi \in \ker \Psi_a$.

Soit $g \in V$, posons $\phi(g) = \sum_{i \in A} \alpha_i v_i$ avec A une partie finie de $\mathbb{Z}$, pour chaque $i \in A$

on note $i = p_i \ell + r_i$ la division euclidienne de i par ℓ , on a alors $\phi(g) = \sum_{i \in A} \alpha_i v_i =$

$\sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i v_i$, par hypothèse $\Psi_a(\phi) = 0$, alors $\Psi_a(\phi)(g) = 0$, donc $\sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i P_a(v_i) = 0$,

ainsi $\sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s = 0$, par la liberté de la famille $(v_s)_{0 \leq s < \ell}$, on obtient, pour tout

s ($0 \leq s < \ell$), on a $\sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s = 0$, on en déduit alors que ;

$$\begin{aligned} \phi(g) &= \sum_{i \in A} \alpha_i v_i \\ &= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i v_i - \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i a^{p_i} v_s \\ &= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i (v_i - a^{p_i} v_s) \\ &= \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{r_i=s \\ i \in A}} \alpha_i (v_i - a^{p_i} v_{r_i}) \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate.

21. (a) $\Psi_a(E)(v_0) = P_a(E(v_0)) = P_a(v_{-1})$, la division euclidienne de -1 par ℓ s'écrit $-1 = (-1) \cdot \ell + (\ell - 1)$, donc $\Psi_a(E)(v_0) = a^{-1} v_{\ell-1}$.

(b) On a $\Psi_a(E)(v_0) = a^{-1} v_{\ell-1}$, et $0 < \forall i < \ell$, $\Psi_a(E)(v_i) = v_{i-1}$, on compose ℓ -fois on obtient $0 \leq \forall i < \ell$, $\Psi_a(E)^\ell(v_i) = a^{-1} v_i$, c'est-à-dire $\Psi_a(E^\ell)(v_i) = a^{-1} v_i$, d'où $\Psi_a(E^\ell) = a^{-1} \text{Id}_{W_\ell}$.

(c) Il est facile de vérifier que $X^\ell - a^{-1}$ est le polynôme minimale de $\Psi_a(E)$,

donc $\mathbb{C}[\Psi_a(E)] = \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} \mathbb{C} \Psi_a(E)^k$, ainsi $\dim(\mathbb{C}[\Psi_a(E)]) = \ell$.

(d) Les vecteurs propres de $\psi_a(E)$, d'abord les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont les racines ℓ -ièmes de a^{-1} , ce sont alors les nombres $(bq^i)^{-1}$, $0 \leq i < \ell - 1$.

D'une façon analogue à la (question 10.b), on démontre que $\ker(\Psi_a(E) - (bq^i)^{-1} \text{Id}_{W_\ell})$ est le sous espace vectoriel engendré par u_i où u_i est le vecteur de composante $((bq^i)^{-1}, (bq^i)^{-2}, \dots, (bq^i)^{-\ell})$ dans la base $(v_0, v_1, \dots, v_{\ell-1})$.

22. (a) Si W est un sous espace vectoriel de W_ℓ stable par $\Psi_a(H)$, alors l'endomorphisme induit par $\Psi_a(H)$ sur W admet au moins un vecteur propre $v \in W$, par la même façon que la question 6.b, le vecteur v est l'un des vecteur v_i , $0 \leq i < \ell$.

(b) Si de plus W est stable par $\Psi_a(E)$, alors les éléments $v_r, \Psi_a(E)(v_r), \dots, \Psi_a(E)^{\ell-1}(v_r)$ sont dans W , où $0 \leq r < \ell$ tel que $v_r \in W$, c'est-à-dire W contient les vecteurs $v_r, \dots, v_{\ell-1}, \dots, a^{-1}v_0, \dots, a^{-1}v_{r-1}$. Or la famille formé par ces vecteurs forme une base de W_ℓ , alors $W = W_\ell$.

23. Expression le l'opérateur $\Psi_a(F)^\ell$, pour tout $0 \leq i < \ell$, on a $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = a(\prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k))v_i$

d'où $\Psi_a(F)^\ell = (\prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k)) \text{Id}_{W_\ell}$, le polynôme caractéristique de $\Psi_a(F)$ est $(-1)^\ell X^\ell -$

$(-1)^\ell a \prod_{k=0}^{\ell-1} \mu(k)$, donc $\Psi_a(F)$ est nilpotent si, et seulement si, $\prod_{k=1}^{\ell-1} \mu(k) = 0$ si, et seulement si, $0 \leq \exists k < \ell$ tel que $\mu(k) = 0$, comme $\forall i \in \mathbb{Z}$, $R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(i) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1}$, alors $\Psi_a(F)$ est nilpotent si, et seulement si, $0 \leq \exists k < \ell$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = q^{-1}\lambda(k) + q\lambda(k)^{-1}$, ou encore (puisque μ et λ sont ℓ périodiques) si, et seulement si, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = q^{-1}\lambda(k) + q\lambda(k)^{-1}$.