

CONCOURS COMMUN MINES.PONTS.TELECOM... 1979

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}_+ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels : $0, 1, 2, \dots$

\mathbb{N}^* désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues à valeurs réelles définies sur \mathbb{R}_+ .

Pour $x \in \mathbb{R}$, les deux symboles $\exp(x)$ et e^x seront utilisés concurremment.

Les candidats pourront admettre les résultats qu'ils n'auraient pas démontrés, à condition de le préciser explicitement.

PARTIE I

A deux fonctions f et g de E et au réel x de \mathbb{R}_+ , faisons correspondre le réel $f_*g(x)$ défini par la relation :

$$f_*g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t) dt$$

1°) a) Montrer que l'application, notée $f_*g, x \rightsquigarrow f_*g(x)$ appartient à E.

b) Montrer : $f_*g = g_*f$

c) Montrer que l'application $(f, g) \rightsquigarrow f_*g$ de $E \times E$ dans E est bilinéaire.

Il sera admis que l'opération $*$ est associative.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$; soit $f_{\lambda, n}$ la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}_+$, par la relation :

$$f_{\lambda, n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda x}$$

Vérifier brièvement que la fonction $f_{\lambda, n}$ appartient à E et montrer la propriété :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f_{\lambda, n} * f_{\lambda, p} = f_{\lambda, n+p}$$

PARTIE II

Soit A un réel strictement positif ; soit I l'intervalle $[0, A]$.

1°) Soient λ, t, a trois nombres réels fixés ; soit la série de terme général u_n $n=1, 2, \dots$ défini par la relation :

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{n\lambda(t-a)}$$

Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme S(t) :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

.../...

2°) Soit f une fonction réelle définie et continue sur I ; soit a un réel de I.

a) Montrer la propriété :

$$\forall \epsilon \quad \exists N : \forall n > N : \forall t \in I \quad \left| \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} e^{p\lambda(t-a)} f(t) \right| < \epsilon$$

b) En déduire :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^A e^{p\lambda(t-a)} f(t) dt = \int_0^A [1 - \exp(-e^{\lambda(t-a)})] f(t) dt$$

3°) Pour t et a fixés appartenant à \mathbb{R}_+ , trouver la limite lorsque λ croit indéfiniment, de l'expression : $1 - \exp(-e^{\lambda(t-a)})$.

4°) Soit $I(\lambda)$ l'expression :

$$I(\lambda) = \int_0^A [1 - \exp(-e^{\lambda(t-a)})] f(t) dt - \int_a^A f(t) dt \quad 0 \leq a \leq A$$

a) Soit α un réel positif ($\alpha < \inf(a, A-a)$) ; en écrivant $I(\lambda)$ sous la forme :

$$I(\lambda) = \int_0^{a-\alpha} \phi(t) dt + \int_{a-\alpha}^a \phi(t) dt + \int_a^{a+\alpha} \psi(t) dt + \int_{a+\alpha}^A \psi(t) dt$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions continues, montrer :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = 0$$

b) En déduire :

$$\int_a^A f(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^A e^{p\lambda(t-a)} f(t) dt \right\}.$$

PARTIE III

I désigne toujours l'intervalle $[0, A]$; $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle $]0, A[$.

1°) Soit f une fonction réelle, définie et continue sur I, telle que :

$$\exists M \quad M \in \mathbb{R}_+ : \forall k \in \mathbb{N} \quad \left| \int_0^A e^{kt} f(t) dt \right| < M.$$

Montrer, à l'aide de la question n°4 de la partie II :

$$\forall a \in \overset{\circ}{I} \quad \int_a^A f(t) dt = 0.$$

En déduire la nullité de f sur I.

2°) Soit f une fonction réelle, définie et continue sur I, telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^A t^k f(t) dt = 0.$$

En effectuant le changement de variable $t = ae^u$ et en posant : (avec $a \in \overset{\circ}{I}$)

$$g(u) = e^u f(ae^u) \quad B = \text{Log} \frac{A}{a}$$

montrer que toutes les intégrales $\int_0^B e^{nu} g(u) du$ $n \in \mathbb{N}$ sont majorées en valeur absolue.

En conclure que la fonction f est nulle.

.../...

3°) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $J = [0, 2A]$; soit D le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 :

$$D = [-A, +A] \times [-A, +A]$$

a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \iint_D e^{n(x+y)} f(A-x) f(A-y) dx dy = \left[\int_{-A}^A e^{nx} f(A-x) dx \right]^2$$

b) Soit D_+ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 :

$$D_+ = \{ (x, y) \in D \mid x+y > 0 \}$$

Effectuer le changement de variables

$$x = A - u$$

$$y = A + u - v$$

dans l'intégrale :

$$\iint_{D_+} e^{n(x+y)} f(A-x) f(A-y) dx dy$$

Quelle est la valeur de cette intégrale lorsque la fonction f vérifie la condition (C) suivante ?

$$(C) \quad \forall x \in J \quad \int_0^x f(x-t) f(t) dt = 0.$$

c) En déduire que si la fonction f vérifie la condition (C), il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_{-A}^A e^{nt} f(A-t) dt \right| < A\sqrt{2} \sup_{t \in J} |f(t)|$$

A l'aide de la question n°1, montrer que, si la fonction f vérifie (C), elle est nulle sur I .

PARTIE IV

Soient f et g deux fonctions de E ; soit h la fonction de $E \rightsquigarrow t$; soit ϕ la fonction :

$$\phi = (h.f) \cdot g + f \cdot (h.g)$$

$h.f$ désigne la fonction $t \rightsquigarrow h(t) \cdot f(t)$.

1°) Montrer :

$$\phi = h \cdot (f \cdot g).$$

Montrer, en considérant la fonction $f \cdot (h.g) \cdot \phi$, que si les fonctions f et g vérifient :

$$f \cdot g = 0$$

il vient :

$$f \cdot (h.g) = 0$$

En déduire plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f \cdot (h^n \cdot g) = 0$$

h^n désigne la fonction $t \rightsquigarrow [h(t)]^n$.

2°) Montrer que si f et g vérifient la relation $f \cdot g = 0$ et s'il existe un réel a positif tel que $f(a) \neq 0$, la fonction g est nulle.

FIN