

I.1. La matrice $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \alpha(1-\alpha)-1 & \alpha \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $\chi_{A(\alpha)}(X) = X^2 - X + 1$. On a donc $Sp(A(\alpha)) = \{-j, -j^2\}$. On remarque $B(\alpha) = A(-\alpha)$ d'où $Sp(B(\alpha)) = \{-j, -j^2\}$. Enfin $A(\alpha) + B(\alpha) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2(\alpha^2 + 1) & 0 \end{pmatrix}$, on a $Sp(A(\alpha) + B(\alpha)) = \{1 - i\sqrt{4\alpha^2 + 3}, 1 + i\sqrt{4\alpha^2 + 3}\}$.

I.2. Pour $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$, le spectre est contenu dans la boule unité fermée.

En revanche, si $\lambda \in Sp(A(\alpha) + B(\alpha))$, on a $|\lambda| = 2\sqrt{\alpha^2 + 1}$ qui n'est pas borné lorsque α décrit \mathbf{R} .

I.3.a) Si on note $G = Vect(v_k, \dots, v_n)$, on a $dim(G) = n - k + 1$. On peut appliquer la formule de Grassmann

$$n = dim(\mathbf{C}^n) \geq dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = n + 1 - dim(F \cap G).$$

Donc $dim(F \cap G) \geq 1$.

I.3.b) Si x est un vecteur non nul appartenant à $F \cap G$, on décompose $x = \sum_{j=k}^n \alpha_j v_j$. On a $Ax = \sum_{j=k}^n \alpha_j \lambda_j v_j$.

Alors
$$\frac{x^* Ax}{x^* x} = \frac{\sum_{j=k}^n \lambda_j |\alpha_j|^2}{\sum_{j=k}^n |\alpha_j|^2} \geq \lambda_k$$

I.3.c) Si on prend le cas particulier du sous-espace $F = Vect(v_1, \dots, v_k)$ et si $x = \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j$ est un vecteur

non nul de F , on a
$$\frac{x^* Ax}{x^* x} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j |\alpha_j|^2}{\sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2} \leq \lambda_k$$
. Mais en prenant le cas particulier du vecteur $x = v_k$, on a
$$\frac{x^* Ax}{x^* x} = \lambda_k$$
. Ceci permet d'écrire $\text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \lambda_k$.

I.3.d) Soit $F \in \mathcal{E}_k$. Pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, en décomposant x sur la base (v_1, \dots, v_n) , on observe que

$$\lambda_1 \leq \frac{x^* Ax}{x^* x} \leq \lambda_n. \text{ Donc } \text{Sup}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} \text{ existe. On doit montrer qu'il est atteint.}$$

Notons $S = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \|x\|_2 = \sqrt{x^* x} = 1\}$ et $K = F \cap S$. K est une partie compacte de E . En effet K est bornée et fermée comme intersection de deux fermés. L'application $x \mapsto x^* Ax$ étant continue sur K atteint un maximum sur K : en x_0 . Alors, pour tout $x \in F \setminus \{0\}$ on a $y = \frac{x}{\sqrt{x^* x}} \in K$ donc $y^* Ay \leq x_0^* Ax_0$. D'où

$$\frac{x^* Ax}{x^* x} \leq x_0^* Ax_0. \text{ On a donc montré l'existence de } \text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x}. \text{ D'après 3.b) } \text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} \geq \lambda_k. \text{ Puis,}$$

$$\text{d'après 3.c) } \text{Min}_{F \in \mathcal{E}_k} \left(\text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} \right) = \lambda_k$$

I.3.e) D'après 3.d), $\text{Min}_{F \in \mathcal{E}_k} \left(\text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*(A+B)x}{x^* x} \right) = \lambda_k(A+B)$. Par ailleurs, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\lambda_1(B) \leq \frac{x^* B x}{x^* x} \leq \lambda_n(B).$$

• Si on choisit $F = Vect(v_1, \dots, v_k)$, pour tout $x \in F \setminus \{0\}$, on a $\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$. Donc

$$\text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B) \text{ et } \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

• Si $F \in \mathcal{E}_k$, d'après 3.b) il existe $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $\frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k(A)$. On a alors $\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$.

On en déduit $\text{Max}_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$, puis $\lambda_k(A+B) \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$.

II.4.a) Si on considère (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{C}^n , on a, pour tout i , $a_{i,i} = e_i^* A e_i = \frac{e_i^* A e_i}{e_i^* e_i}$. Donc $a_{i,i} \in \mathcal{V}(A)$.

II.4.b) On a, pour tout $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, $x^* A^* x = {}^t \bar{x}^t \bar{A} x = {}^t x \bar{A} \bar{x} = \overline{x^* A x}$.

On en déduit que $\frac{x^* H(A) x}{x^* x} = \text{Re} \left(\frac{x^* A x}{x^* x} \right)$. Donc $\mathcal{V}(H(A)) = \text{Re}(\mathcal{V}(A))$.

II.4.c) Si $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, $\frac{x^*(A+B)x}{x^*x} = \frac{x^* A x}{x^*x} + \frac{x^* B x}{x^*x} \in \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

II.4.d) Soient $\lambda \in Sp(A)$ et x un vecteur propre associé. Alors $\lambda = \frac{x^* A x}{x^* x} \in \mathcal{V}(A)$.

II.4.e) On a $Sp(A+B) \subset \mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

II.4.f) Notons $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, on a $\frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j |x_j|^2}{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Réciproquement, si $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_n]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\lambda = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_n$. Le vecteur $x = \sqrt{t}e_1 + \sqrt{1-t}e_n$ vérifie $\frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda \in \mathcal{V}(A)$.

II.4.g) Si $a \in \mathcal{V}(U^* A U)$, il existe x non nul tel que $a = \frac{x^* U^* A U x}{x^* x}$. On pose $y = Ux$. On a $y^* y = x^* x$. Ainsi $a = \frac{y^* A y}{y^* y} \in \mathcal{V}(A)$. Inversement si $a \in \mathcal{V}(A)$, on écrit $a = \frac{y^* A y}{y^* y}$ avec y non nul, puis en posant $x = U^* y$, on a $a = \frac{x^* U^* A U x}{x^* x} \in \mathcal{V}(U^* A U)$.

II.4.h) Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A classées dans l'ordre croissant, en utilisant le théorème T et les questions 4.f) et 4.g), on a $\mathcal{V}(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

II.4.i) Si x est un vecteur non nul, en posant $y = \frac{x}{\sqrt{x^* x}}$, on a $\frac{x^* A x}{x^* x} = y^* A y$. On en déduit que $\mathcal{V}(A)$ est l'image de $S = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \|x\|_2 = \sqrt{x^* x} = 1\}$ par $x \mapsto x^* A x$. Donc $\mathcal{V}(A)$ est l'image d'une partie compacte par une application continue. C'est donc une partie compacte de \mathbf{C} .

II.5.a) Si A est nilpotente, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que X^m est un polynôme annulateur de A . On sait que

les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme. Donc $Sp(A) \subset \{0\}$. Comme une matrice complexe admet toujours au moins une valeur propre $Sp(A) = \{0\}$. Réciproquement, si $Sp(A) = \{0\}$, le polynôme caractéristique de A est $(-1)^n X^n$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton $A^n = 0$.

II.5.b.i) On a $Sp(A) \subset \mathcal{V}(A)$. Donc $Sp(A) = \{0\}$ et A est nilpotente.

II.5.b.ii) Soient $x \in Ker(A)$ et $z \in Im(A)$. On écrit $z = Ay$. On a alors

$0 = (x+y)^* A(x+y) = x^* Ax + x^* Ay + y^* Ax + y^* Ay = x^* Ay + y^* Ax = x^* Ay = \langle x|z \rangle$. Donc $x \in (Im(A))^\perp$. En utilisant la formule du rang on a $dim(Ker(A)) = n - dim(Im(A)) = dim((Im(A))^\perp)$ d'où l'égalité de ces sous-espaces.

II.5.b.iii) Soient x un vecteur non nul et $k = \text{Min}\{p \in \mathbf{N} \mid A^p x = 0\}$. Supposons $k > 1$.

Alors $A^k x = A A^{k-1} x = 0$ donc $A^{k-1} x \in Ker(A) \cap Im(A)$. $A^{k-1} x$ est orthogonal à lui-même. Il est donc nul, ce qui contredit la définition de k . Donc $k = 1$ et $A = 0$.

III.6.a) Soit $x \in Ker(A)$. On choisit i tel que $|x_i| = \text{Max}_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. On a $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0$ donc $|a_{i,i}| |x_i| \leq L_i(A) |x_i|$.

Comme $L_i(A) < |a_{i,i}|$, on a $|x_i| = 0$ donc $x = 0$ et A est inversible.

III.6.b) Si $\lambda \in Sp(A)$, la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Elle ne vérifie pas l'hypothèse de 6.a) donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|a_{i,i} - \lambda| \leq L_i(A - \lambda I_n) = L_i(A)$. Donc $\lambda \in G(A)$. Par ailleurs $Sp(A) = Sp({}^t A)$ donc $Sp(A) \subset G(A) + G({}^t A)$.

III.7.a) Soit $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ une intersection quelconque de parties convexes de \mathbf{C} . Si $(x, y) \in X \times X$, on a, pour tout $i \in I$, $[x, y] \subset X_i$ donc $[x, y] \subset X$. Par conséquent X est une partie convexe.

III.7.b) Si X est une partie de \mathbf{C} , on note $\text{Conv}(X)$ l'intersection de toutes les parties convexes de \mathbf{C} contenant X . D'après 7.a) il s'agit d'une partie convexe de \mathbf{C} contenant X . Si Y est une partie convexe contenant X , on a $\text{Conv}(X) \subset Y$.

III.7.c) Notons $Y = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \text{ où } n \in \mathbf{N}^*, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \ t_i \geq 0, x_i \in X \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$. On remarque que Y est une partie convexe contenant X . Donc $\text{Conv}(X) \subset Y$. Inversement on montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$

que tout complexe de la forme $x = \sum_{i=1}^n t_i x_i$ où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \ t_i \geq 0, x_i \in X$ et $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ est un élément de

$\text{Conv}(X)$. En effet c'est évident si $t_n = 0$ ou $t_n = 1$. Autrement on écrit $x = \left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{\sum_{i=1}^{n-1} t_i} \right) + t_n x_n$.

On applique l'hypothèse de récurrence et la définition d'une partie convexe donc $x \in \text{Conv}(X)$.

III.7.d) Commençons par l'unicité : Si z_0 et z_1 vérifient $|z_0| = |z_1| = \text{Min}_{z \in K} |z|$ Les points images de z_0 et z_1 sont situés sur le cercle de centre 0 de rayon $\text{Min}_{z \in K} |z|$. Si $z_0 \neq z_1$ le milieu vérifie $\frac{z_0 + z_1}{2} \in K$ et

$\left| \frac{z_0 + z_1}{2} \right| < \text{Min}_{z \in K} |z|$, ce qui est absurde donc $z_0 = z_1$. Prouvons l'existence (on doit supposer K non

vide, ce qui n'est pas dit) : Soit $\alpha = \text{Min}_{z \in K} |z|$. L'ensemble $K \cap \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1 + \alpha\}$ est une partie compacte non vide de \mathbf{C} . L'application $z \mapsto |z|$ qui est continue atteint un minimum sur cette partie donc un minimum sur K , ce qui prouve l'existence de z_0 .

III.7.e) Écrivons $z_0 = a + ib$ et notons $c = -\frac{|z_0|}{2}$. Pour $z = x + iy$, on pose $f(z) = ax + by + c$. Montrons que $K \subset \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) > 0\}$. Soient $z \in K$ et $t \in [0, 1]$. On a $f(z) = \operatorname{Re}(z\bar{z}_0) - \frac{1}{2}|z_0|$ et $tz + (1-t)z_0 \in K$ donc $|tz + (1-t)z_0| \geq |z_0|$. On en déduit

$$\begin{aligned} 0 \leq |tz + (1-t)z_0|^2 - |z_0|^2 &= t^2|z|^2 + t(1-t)(2f(z) + |z_0|^2) + (t^2 - 2t)|z_0|^2 \\ &\sim (2f(z) - |z_0|^2)t \end{aligned}$$

Deux fonctions équivalentes au voisinage de 0 ayant localement le même signe, on a $f(z) \geq \frac{1}{2}|z_0|^2 > 0$

III.7.f) On déduit de la question précédente qu'un convexe fermé ne contenant pas 0 est contenu dans un demi plan $ax + by > 0$. En posant $a - ib = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, on a, pour tout $z \in K$, $\operatorname{Re}(e^{i\theta}z) > 0$. Réciproquement, si $e^{i\theta}K \subset \mathbf{P}$ il est clair que $0 \notin K$.

III.8.a) On remarque que $E_j(e^{i\theta}A) = E_j(A)$. Donc $e^{i\theta}\{z \mid |z - a_{j,j}| \leq E_j(A)\} = \{z \mid |z - e^{i\theta}a_{j,j}| \leq E_j(e^{i\theta}A)\}$. Donc $e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A) = G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A)$. On en déduit que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A) \iff \exists \theta \ G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset \mathbf{P}$.

III.8.b) Si $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le disque de centre $a_{j,j}$ de rayon $E_j(A)$ est contenu dans \mathbf{P} . Donc $a_{j,j} > E_j(A)$. Réciproquement si tous les disques sont contenus dans \mathbf{P} , comme \mathbf{P} est convexe, l'enveloppe convexe de la réunion des disques est contenue dans \mathbf{P} .

III.8.c) Le terme général de la matrice $H(A)$ est $b_{i,j} = \frac{1}{2}(\overline{a_{j,i}} + a_{i,j})$. On en déduit, pour tout i , $b_{i,i} = a_{i,i}$ et $L_i(H(A)) \leq E_i(A)$. On a donc, pour tout i et tout $\lambda \leq 0$, $b_{i,i} - \lambda > L_i(H(A) - \lambda I_n)$. Donc, d'après 6.a), $H(A) - \lambda I_n$ est inversible. Ainsi $\operatorname{Sp}(H(A)) \subset \mathbf{R}^{*+}$. D'après 4.h) $\mathcal{V}(H(A)) \subset \mathbf{R}^{*+}$ et, d'après 4.b) $\mathcal{V}(A) \subset \mathbf{P}$.

III.8.d) Si $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$, il existe θ tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset \mathbf{P}$. Alors, d'après 8.c), $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) \subset \mathbf{P}$. Or $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}\mathcal{V}(A)$, donc $0 \notin \mathcal{V}(A)$.

III.8.e) Si $\lambda \in \mathcal{V}(A)$, $0 \in \mathcal{V}(A - \lambda I_n)$. Alors $0 \in G_{\mathcal{V}}(A - \lambda I_n)$ d'après 8.d). Mais

$$z \in \bigcup_{i=1}^n \{z \mid |z + \lambda - a_{i,i}| \leq E_i(A - \lambda I_n)\} \iff z + \lambda \in \bigcup_{i=1}^n \{z \mid |z - a_{i,i}| \leq E_i(A)\}.$$

Donc $z \in G_{\mathcal{V}}(A - \lambda I_n) \iff z + \lambda \in G_{\mathcal{V}}(A)$. On en déduit $\lambda \in G_{\mathcal{V}}(A)$.

IV.9.a) Par définition de la norme subordonnée, on a, pour tout x , $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. En particulier, si $\|x\| = 1$ et si A et B sont deux matrices, on a $\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\|$. Donc $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

IV.9.b) On remarque que, pour tout vecteur non nul, $\frac{x^* A^* A x}{x^* x} = \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}$. La matrice A^*A est hermitienne. Montrons qu'elle est à valeurs propres positives : si $\lambda \in \operatorname{Sp}(A^*A)$ et si x est un vecteur propre associé, on a $\lambda = \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \geq 0$. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres classées dans l'ordre croissant, on a $\|A\|^2 = \operatorname{Sup} \mathcal{V}(A) = \operatorname{Sup}[\lambda_1, \lambda_n] = \lambda_n$ (d'après 4.h). Donc $\|A\| = \sqrt{\lambda_n}$.

IV.9.c.i) On a vu (4.d) que $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$. Donc $\rho(A) \leq r(A)$.

IV.9.c.ii) On a $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$. Donc $r(A) \leq \inf_{z \in G_{\mathcal{V}}(A)} |z|$. Soit $z \in \bigcup_{i=1}^n \{z \mid |z - a_{i,i}| \leq E_i(A)\}$, il existe i tel que $|z - a_{i,i}| \leq E_i(A)$. Alors $|z| \leq |a_{i,i}| + E_i(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$.

En notant $R(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$, le disque fermé de centre 0 de rayon $R(A)$ est convexe, il contient donc $G_{\mathcal{V}}(A)$. On en déduit $r(A) \leq R(A)$.

IV.9.c.iii) On déduit $\rho(A) \leq r(A) \leq R(A) \leq \frac{\|A\|_1 + \|A\|_{\infty}}{2}$

IV.10.a) Si A est une matrice et λ un complexe $\mathcal{V}(\lambda A) = \lambda \mathcal{V}(A)$. Donc $r(\lambda A) = |\lambda| r(A)$. Par ailleurs si $r(A) = 0$, on a $\mathcal{V}(A) = \{0\}$ donc $A = 0$ d'après 5.b). Enfin l'inégalité triangulaire résulte de l'inclusion $\mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

IV.10.b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{V}(A) = \left\{ \frac{2\bar{x}_1 x_2}{|x_1|^2 + |x_2|^2} \mid (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\} \right\}$. Donc $\mathcal{V}(A)$ est inclus dans le disque fermé de centre 0 de rayon 1.

Réciproquement, en prenant $x_1 = a \in \mathbf{R}$ et $x_2 = e^{i\theta}$, on a $\frac{2\bar{x}_1 x_2}{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \frac{2ae^{i\theta}}{1+a^2}$. Or $\frac{2a}{1+a^2}$ décrit $[-1, 1]$ quand a décrit \mathbf{R} , $\mathcal{V}(A)$ est donc tout le disque fermé de centre 0 de rayon 1. $r(A) = 1$. Même résultat pour $\mathcal{V}(B)$ et $r(B)$. Donc $\mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)$ est encore le disque fermé de centre 0 de rayon 1.

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{V}(AB) = [0, 4]$ et $r(AB) = 4$. r n'est pas une norme matricielle.

IV.10.c) Si x est un vecteur non nul, on a

$$\left| \frac{x^* Ax}{x^* x} \right| = \frac{|\langle x | Ax \rangle|}{\|x\|_2^2} \leq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2.$$

Donc $r(A) \leq \|A\|_2$. Si A est hermitienne ou anti-hermitienne on choisit x un vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module λ . On trouve $r(A) = |\lambda| = \|A\|_2$.

IV.10.d) On a $\|A\|_2 \leq \frac{1}{2} \|A + A^*\|_2 + \frac{1}{2} \|A - A^*\|_2 = \frac{1}{2} r(A + A^*) + \frac{1}{2} r(A - A^*) \leq 2r(A)$ car $r(A^*) = r(A)$.

IV.10.e) on a $4r(AB) \leq 4\|AB\|_2 \leq 4\|A\|_2 \|B\|_2 \leq 4(2r(A))(2r(B)) = (4r(A))(4r(B))$.

IV.10.f) Si $c \geq 4$ en reproduisant le raisonnement précédent, cr est une norme matricielle. Réciproquement, si cr est une norme matricielle, en considérant les matrices du 10.b) complétées avec des 0 pour qu'elles aient la bonne taille, on a $cr(A) = c = cr(B)$ et $cr(AB) = 4c$. Donc $4c \leq c^2$ d'où $c \geq 4$.

FIN