CAPES interne de Mathématiques
session 1997
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag41e]

On considère un plan euclidien (P) muni d'un repère orthonormal $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans un deuxième plan euclidien (P′) on prend deux points distincts A et A′, I est le milieu de [A′A] et on pose A′A = $2a$. (Δ′) et (Δ) sont les droites de (P′) perpendiculaires à la droite (A′A) respectivement en A′ et A. On appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{A'A}$ et $\vec{v}$ celui des droites (Δ) et (Δ′). Le repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormal direct.

On définit une application f de (P) dans l'ensemble $\mathcal{D}'$ des droites de (P′) de la façon suivante : Si m est un point de (P) de coordonnées (x, y) dans $\mathfrak{R}$, on considère les points M de (Δ) et M′ de (Δ′) tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{v}$ et $\overrightarrow{A'M'} = y\vec{v}$, on pose $f(m) = (MM')$.

Voir figures en page 6.

A

Points et droites

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que les images des points de l'axe $(O, \vec{i})$ passent par A′ et que celles des points de l'axe $(O, \vec{j})$ passent par A.
3. Montrer que les images des points de la seconde bissectrice du repère $\mathfrak{R}$ passent par I.
4. Montrer que les images des points de la première bissectrice du repère $\mathfrak{R}$ sont parallèles à (AA′).
5. Montrer que toute droite de (P′) non parallèle à (Δ) est image d'un point unique de (P).
6. On considère dans (P) une droite (d) non parallèle à la première bissectrice du repère $\mathfrak{R}$ et distincte des axes. Elle coupe les axes de $\mathfrak{R}$ respectivement en b et c. On appelle B l'intersection de (Δ) et de $f(b)$, C′ celle de (Δ′) et de $f(c)$, K celle de $f(b)$ et de $f(c)$.

   Soit m un point de (d). Montrer que : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{M'C'}}{\overline{M'A'}} = \dfrac{\overline{mc}}{\overline{mb}}$. En déduire que $f(m)$ passe par K. (Les notations sont celles de l'introduction.)
7. Réciproquement soit K un point de (P′), M et M′ des points de (Δ) et (Δ′) respectivement tels que (MM′) passe par K. (MM′) est l'image d'un point m de (P). Montrer que m appartient à une droite de (P) notée (δ_K). On définit ainsi une application g de (P′) dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de (P) en posant $g(K) = (\delta_K)$.
8. Déterminer g (I), g (A), g (A′), g (D) si D appartient à la médiatrice de [A′A].
9. L'énoncé suivant : « les images par f (ou g) de points alignés sont des droites concourantes » est-il exact ?

B

($\mathscr{C}$) est le cercle de diamètre [AA′] dans le plan (P′), K un point de ($\mathscr{C}$) distinct de A et A′. La tangente en K à ($\mathscr{C}$) coupe (Δ) en C et (Δ′) en C′.

1.*a.* Montrer que le triangle ICC′ est rectangle et en déduire que $\overline{AC} \cdot \overline{A'C'} = a^2$.

b. Énoncer et démontrer la réciproque du résultat précédent.

c. (CC′) est l'image par f d'un point c du plan P. Montrer que c appartient à une hyperbole équilatère $(\mathscr{H}_a)$ dont on déterminera l'équation dans le repère $\mathfrak{R}$.

d. Réciproquement soit c un point de $(\mathscr{H}_a)$. Montrer que $f(c)$ est tangente à ($\mathscr{C}$).

2. Dans la suite on admettra la propriété suivante des coniques : « une droite est tangente à une conique si et seulement si elle admet un point commun et un seul avec celle-ci, sauf dans les deux cas suivants où le deuxième point d'intersection est à l'infini : droite parallèle à une asymptote d'une hyperbole, droite parallèle à l'axe d'une parabole ».

   a. Montrer que la droite g (K) dans (P) est tangente à $(\mathcal{H}_a)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

   b. La droite (AK) coupe (Δ′) en Q′, la droite (A′K) coupe (Δ) en Q. Montrer que C est milieu de [AQ] et C′ milieu de [A′Q′].

   c. Quels sont les points p et q de (P) tels que $f(p) = (\mathrm{A'Q})$ et $f(q) = (\mathrm{AQ'})$? (On remarquera que g (K) = (pq).)

   d. Déduire de ce qui précède que dans (P) c est milieu de $[pq]$. On retrouve ainsi une propriété classique de la tangente à une hyperbole que l'on énoncera avec précision.

3. L'affinité orthogonale.

   Soit k un réel non nul, on rappelle que l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport k est la transformation $\tau_{\mathrm{D},k}$ du plan euclidien qui à tout point M fait correspondre le point M′ tel que :

   – la droite (MM′) est perpendiculaire à (D) ;

   – si $\mathrm{H_M}$ est le pied de la perpendiculaire issue de M à (D), on a $\overline{\mathrm{H_M M'}} = k\,\overline{\mathrm{H_M M}}$.

   a. Montrer que $\tau_{\mathrm{D},k}$ est une bijection du plan euclidien et que $\tau^{-1}_{\mathrm{D},k} = \tau_{\mathrm{D},\frac{1}{k}}$.

   b. Montrer que le transformé d'une droite non parallèle à (D) est une droite et que leur point d'intersection est sur (D).

   c. Montrer que le transformé d'un cercle centré sur (D) est une ellipse dont (D) est l'un des axes.

   On admettra que l'affinité orthogonale conserve les contacts (une courbe et sa tangente sont transformées en une courbe et sa tangente). Déduire de cette propriété et de celle démontrée en 2.*b*. une méthode de construction de la tangente en un point à une ellipse donnée par ses sommets et ce point.

4. On considère dans le plan (P) l'homothétie $h_{(\mathrm{O},k)}$ de centre O et de rapport k. L'affinité $\tau_{(\mathrm{AA'}),k}$ sera interprétée comme une transformation de l'ensemble des droites de (P′).

   Montrer que $f \circ h_{(\mathrm{O},k)} = \tau_{(\mathrm{AA'}),k} \circ f$.

5. On considère dans le plan (P) l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_b)$ d'équation $x\,y = b^2$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{0, a\}$. Soit c un point quelconque de $(\mathcal{H}_b)$. Montrer que $f(c)$ est tangente à une ellipse $(\mathcal{E}_b)$ dont on donnera les axes. Préciser sur quel axe sont les foyers suivant la valeur de b.

6. La tangente à $(\mathcal{H}_b)$ en c coupe l'axe $(\mathrm{O}, \vec{i})$ en p et l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ en q. Avec les notations précédentes on a :

$$f(c) = (\mathrm{CC'}) \qquad f(p) = (\mathrm{A'N}) \qquad f(q) = (\mathrm{AN'})$$

   avec C, N sur (Δ) et C′, N′ sur (Δ′).

   (i) Montrer que ces trois droites sont concourantes en K et que $\mathrm{K} \in (\mathcal{E}_b)$.

   (ii) Montrer que C est le milieu de [AN] et C′ le milieu de [A′N′].

7. Réciproquement on considère dans le plan (P′) l'ellipse $(\mathcal{E}_b)$ dont A et A′ sont deux sommets et dont l'autre axe est de demi-longueur b. Soit K un point de $(\mathcal{E}_b)$ distinct de A et A′. La tangente en K à $(\mathcal{E}_b)$ coupe (Δ) en C et (Δ′) en C′ ; (A′K) coupe (Δ) en N et (AK′) coupe (Δ′) en N′. Montrer que (CC′) est l'image par f d'un point c de (P) appartenant à l'hyperbole $(\mathcal{H}_b)$ et que g (K) est tangente à $(\mathcal{H}_b)$ en c.

C

1. On considère dans le plan (P′) une hyperbole (Γ) de sommets A et A′ et de foyers F et F′. I est le milieu de [A′A]. On pose IF = IF′ = c. Soit K un point de (Γ) distinct de A et A′. La droite (KA′) coupe (Δ) en N et la droite (KA) coupe (Δ′) en N′. On désigne par M le milieu de [AN] et M′ le milieu de [A′N′] et m le point du plan (P) tel que $f(m)$ = (MM′).

   a. Établir l'équation de (Γ) dans (P′) rapporté au repère $(\mathrm{I}, \vec{u}, \vec{v})$.

   b. Montrer que m appartient à l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H}_b^*)$ d'équation $xy = -b^2$ où $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. Soit dans un plan euclidien un cercle (𝒞) de centre O et de rayon R, un point P et une droite (Δ) passant par P et coupant (𝒞) en M et M′. On montre facilement et on admettra que $\overline{\mathrm{PM}} \cdot \overline{\mathrm{PM}'} = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{R}^2$. Ce nombre, indépendant de Δ, s'appelle puissance de P par rapport à (𝒞) et sera noté 𝒞 (P). Ce résultat sera admis dans la suite.

   a. Dans le plan (P) on considère à nouveau l'hyperbole $(\mathcal{H}_b^*)$ du 1.*b.* d'équation $xy = -b^2$. Soit m un point de $(\mathcal{H}_b^*)$ non situé sur la seconde bissectrice des axes. La droite $f(m)$ du plan (P′) coupe (Δ) en M et (Δ′) en M′. Le cercle $(\mathcal{C}_m)$ de diamètre [MM′] recoupe (Δ) en M_1 et la droite (AA′) en F et F′.

   (i) Calculer la puissance $\mathcal{C}_m(\mathrm{A})$ de A par rapport au cercle $(\mathcal{C}_m)$. En déduire que les points F et F′ sont fixes quand m varie et que $c^2 = a^2 + b^2$ où c = IF = IF′.

   (ii) On projette F et F′ respectivement en H et H′ sur $f(m)$. (FH) recoupe $(\mathcal{C}_m)$ en H_1.
   - Montrer que les angles ((FH), (FF′)) et ((MM′), (Δ)) sont égaux.
   - Montrer que des angles inscrits égaux sous-tendent des cordes égales.
   - Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}'}$?
   - Déduire des deux points précédents que $\mathrm{F'H_1} = 2\,a$, puis que H et H′ appartiennent au cercle de diamètre [AA′].
   - Montrer que $\overline{\mathrm{FH}} \cdot \overline{\mathrm{F'H'}} = -b^2$.

   b. Dans (P) la tangente en m à $(\mathcal{H}_b^*)$ coupe l'axe $(\mathrm{O}, \vec{i})$ en p et l'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$ en q. On a démontré au B.2.*d.* que m est le milieu de $[p, q]$. On sait (question A.6.) que dans (P′) les droites $f(p)$, $f(q)$, $f(m)$ sont concourantes en un point K de coordonnées (X, Y). On sait aussi que (x, y) sont les coordonnées de m, que $f(p)$ passe par A′ et $f(q)$ par A.

   (i) $f(p)$ coupe (Δ) en N et $f(q)$ coupe (Δ′) en N′. Quelles sont les positions relatives des points A, M, N et des points A′, M′, N′ ?

   (ii) Trouver deux expressions différentes liant X, Y, x, y. En déduire que K appartient à l'hyperbole (Γ) de sommets A et A′ et de foyers F et F′.

   (iii) Établir l'équation de la droite $f(m)$ et montrer qu'elle est tangente à l'hyperbole (Γ).

   c. Déduire de ce qui précède les théorèmes suivants :

   (i) dans une hyperbole les projetés des foyers sur une tangente quelconque sont sur le cercle principal (cercle de diamètre les sommets) ;

   (ii) dans une hyperbole le produit des distances algébriques des foyers à une tangente à l'hyperbole est égal à $-b^2$.

   d. Soit l'hyperbole définie par ses sommets et passant par un point K. Proposer une méthode de construction de la tangente en K et des foyers de cette hyperbole.

D

On considère dans le plan (P) l'hyperbole équilatère $(\mathcal{H})$ d'équation $x^2 - y^2 = a^2$.

1. Soit $m \in (\mathcal{H})$, montrer que dans (P′) A se projette orthogonalement sur $f(m)$ en un point H situé sur la médiatrice de [AA′].

2. Soient T le point d'intersection des droites (AA′) et $f(m)$, E le point de $f(m)$ tel que H est le milieu du segment [ET], H_1 le point d'intersection des droites (AH) et (Δ').

   a. Montrer que H est milieu du segment $[AH_1]$ et que la droite (H_1E) est perpendiculaire à (Δ').

   b. Montrer que E est un point de la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer A et de directrice (Δ').

3. Soit Q un point de $f(m)$ distinct de E, Q_1 la projection de Q sur (Δ'). Montrer que $QQ_1 < QA$. En déduire que $f(m)$ est tangente à $(\mathcal{P})$.

E

f conserve les contacts

On définit dans (P) l'arc paramétré (γ) ainsi : I est un intervalle de $\mathbb{R}$, φ et ψ deux fonctions de classe C^1, (γ) est l'ensemble des points de coordonnées $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$, $t \in I$. On suppose que (γ) n'a pas de tangente parallèle à la première bissectrice du repère $\mathcal{R}$ et que $\forall\, t \in I$, $\varphi'(t) \cdot \psi'(t) \neq 0$.

1. Soit $m \in (\gamma)$ de coordonnées $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Établir l'équation de la tangente (t_m) en m à (γ).

2. Chercher les coordonnées du point K_m de (P′) tel que $g(K_m) = t_m$.

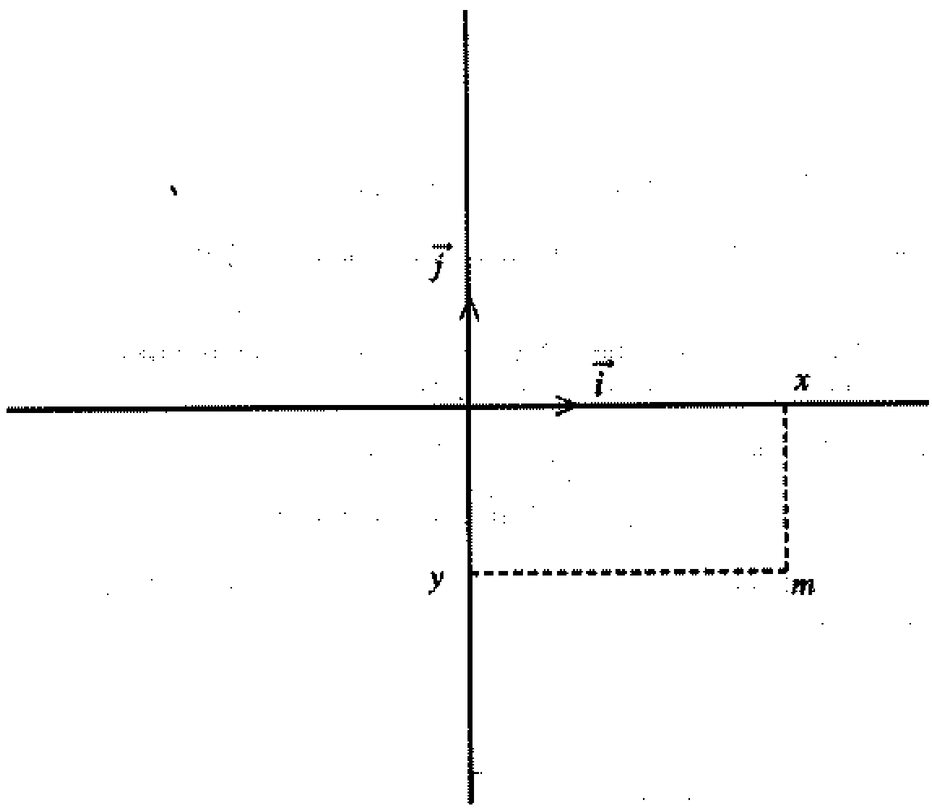
3. Établir l'équation de la droite $f(m)$ et chercher son enveloppe (Γ) quand m décrit (γ).

4. Montrer que $K_m \in (\Gamma)$.

5. On étend la définition de f aux droites du plan (P) : si (d) est une droite de (P), on appelle $f(d)$ le point de (P′) commun à toutes les droites $f(m)$ où m est un élément de (d). Déduire de ce qui précède que f transforme le point de contact et la tangente d'un arc (γ) en la tangente et le point de contact d'un arc (Γ). On pose $\Gamma = f(\gamma)$.

6. Traduire dans ce langage les résultats des questions précédentes.

(P)



(P′)