

Exercice 1

1. (i) u est de rang 1 donc $\text{Im } u \cap \text{Ker } u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

Si $\dim \text{Im } u \cap \text{Ker } u = 0$, alors $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, on a $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$.

Si $\dim \text{Im } u \cap \text{Ker } u = 1$, alors $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \text{Im } u$ et on a $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$.

(ii) e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E . On peut la compléter en une base de E par le théorème de la base incomplète.

$e \in \text{Ker } u$, donc dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle. et toutes les autres

colonnes seront dans $\text{Im } u$ donc colinéaires à e d'o une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La trace de cete matrice est nulle donc dans le cas o $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ on a bien $\text{Tr } u = 0$

(iii) u est de rang 1 donc 0 est valeur propre de u et $E_0 = \text{Ker } u$ est de dimension $n - 1$.

$a) \Rightarrow b)$

u est diagonalisable et $\dim E_0 = n - 1$ donc il existe une seconde valeur propre a avec $\dim E_a = 1$.

Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a \oplus E_0$ la matrice de u est
$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque sur la matrice que $\text{Im } u = E_a$. On a donc bien $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$

$b) \Rightarrow c)$ et $a)$

$\text{Im } u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, soit e un vecteur générateur de $\text{Im } u$. $u(e) \in \text{Im } u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e : il existe un réel a tel que $u(e) = a.e$, de plus, comme $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont en somme directe, $e \notin \text{Ker } u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ la matrice de u

est
$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\text{Tr } u = a \neq 0$ et u diagonalisable

$c) \Rightarrow b)$

On suppose que $\text{Tr } (u) \neq 0$. De la question (ii), on déduit que $\text{Im } u \not\subset \text{Ker } u$ puis de la question (i), on déduit $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$

2. (i) F_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ et $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad F_A(X + \lambda Y) = F_A(X) + \lambda F_A(Y)$. (linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.)

F_A est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad F_{A+\lambda B} = F_A + \lambda F_B$. (linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.) F est donc une application linéaire

(iii) AE_{ij} est la matrice dont la j ème colonne est égale à la i ème colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles. Sa trace est donc égale à a_{ji} : $F_A(E_{ij}) = a_{ji}$

Si F_A est nulle, alors, pour tout (i, j) , $a_{ji} = F_A(E_{ij}) = 0$. La matrice A est donc nulle, on en déduit que

F est injective

(iv) F est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^* = n^2$.

F est donc un isomorphisme

3. (i) F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$ et $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$. Il existe donc une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $f = F_A$ c'est à dire $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad f(X) = \text{Tr}(AX)$.

(ii) $\psi_f(X) = 0 \Leftrightarrow f(X)J = 0 \Leftrightarrow f(X) = 0$ (car $J \neq 0$). donc $\boxed{\text{Ker } \psi_f = \text{Ker } f}$

f est une forme linéaire non nulle et $J \neq 0$ donc

$\boxed{\text{l'image de } \psi_f \text{ est le sous-espace-vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ engendré par } J}$

$\boxed{\text{le rang de } \phi_f \text{ est égal à } 1}$

(iii) $\psi_f(J) = f(J)J = \text{Tr}(AJ)J$.

Si $\text{Tr}(AJ) = 0$, alors $\psi_f(J) = 0$ et $\text{Im } \psi_f \subset \text{Ker } \psi_f$ et d'après la question 1.(ii), $\text{Tr}(\psi_f) = 0 = \text{Tr}(AJ)$.

Si $\text{Tr}(AJ) \neq 0$, alors $\psi_f(J) = \text{Tr}(AJ)J$ et d'après le calcul fait dans la question 1.(iii), $\text{Tr}(\psi_f) = \text{Tr}(AJ)$.

Dans les deux cas: $\boxed{\text{Tr}(\psi_f) = \text{Tr}(AJ)}$

(iv) De la question 1.(iii), on déduit que $\boxed{\psi_f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \text{Tr}(AJ) \neq 0}$

(v) Dans le cas où ψ_f est diagonalisable, ses valeurs propres sont 0 et $\text{Tr}(AJ)$ ($\text{Tr}(AJ) \neq 0$).

Le polynôme minimal de ψ_f est donc $\boxed{P_{\psi_f}(X) = X(X - \text{Tr}(AJ))}$

Exercice 2

1. (i) On fait un développement limité en 0 du numérateur:

$$\frac{1}{x^2}f(x) = \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{-1}{2} + o(1)$$

donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}f(x) = -\frac{1}{2}}$

(ii) On sait alors qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $|\frac{f(x)}{x^2} + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$, c'est à dire

$$\boxed{\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad -\frac{3}{4}x^2 \leq \ln(\cos x) \leq -\frac{1}{4}x^2}$$

(iii) a. $\sum u_n^2$ converge, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos u_n = 1$.

$\boxed{\text{Il existe donc un entier naturel } n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad \cos u_n > 0}$

(iii) b. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, on déduit de la question 1 que $-\ln(\cos u_n) \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{2}$, de plus $\sum_{n \geq n_0} -\ln(\cos u_n)$

et $\sum_{n \geq n_0} \frac{u_n^2}{2}$ sont des séries à termes positifs et $\sum \frac{u_n^2}{2}$ converge, donc $\boxed{\sum_{n \geq n_0} -\ln(\cos u_n) \text{ converge}}$

2. (i) $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc pour tout entier naturel i , $0 < \cos \frac{\beta}{2^i} < 1$.

On en déduit que $\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive.

$\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive, donc elle converge vers une limite $l_\beta \geq 0$.

(ii) On reprend la question 1.(iii) avec $u_n = \frac{\beta}{2^n}$ et $n_0 = 0$.

La suite de terme général u_n^2 converge et pour tout $n \geq 0$ on a $\cos u_n > 0$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \ln(\cos u_n)$ converge vers un réel que l'on notera l .

La limite l_β de la suite $\mathbf{P}_\beta$ est alors égale à e^l .

On a donc bien $\boxed{l_\beta > 0}$

3. (i) Π_0 est un carré de côté $\sqrt{2}$ et Π_1 est un octogone régulier.

(ii) a. OAC est un triangle isocèle de sommet O . Si M est le milieu de AC , alors OM est la hauteur du triangle associée à la base AC et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}OM.AC = OM.MA$.

Le triangle OAM est rectangle en M et l'angle du sommet O est égal à θ . On en déduit les relations :

$$\frac{OM}{OA} = \cos \theta \text{ et } \frac{MA}{OA} = \sin \theta \text{ avec } OA = 1.$$

finalement : $\boxed{\text{aire}(OAC) = OM.MA = \sin \theta \cos \theta}$

(ii) b. les triangles OMA et OAB ont la mme hauteur AM et ont pour bases respectives OM et OB .

On en déduit la relation $\frac{\text{aire}(OMA)}{\text{aire}(OAB)} = \frac{OM}{OB} = OM = \cos \theta$.

De plus $\text{aire}(OAC) = 2 \text{aire}(OMA)$

donc $\text{aire}(OAC) = 2 \cos \theta \text{aire}(OAB)$.

On en déduit aussi l'aire du triangle OAB : $\text{aire}(OAB) = \frac{\sin \theta}{2}$

(iii) Le polynme Π_n est formé de 2^{n+2} triangles semblables à OAB_n donc: $\text{aire}(\Pi_n) = 2^{n+2} \text{aire}(OAB_n)$.

(iv) De la question (ii), on déduit l'aire de OAB_n : $\text{aire}(OAB_n) = \frac{\sin \theta_n}{2} = \frac{\sin \frac{2\pi}{2^{n+2}}}{2}$

et l'aire de Π_n : $\text{aire}(\Pi_n) = 2^{n+2} \frac{\sin \frac{2\pi}{2^{n+2}}}{2}$

puis $\frac{\text{aire}(\Pi_{n+1})}{\text{aire}(\Pi_n)} = \frac{2^{n+3} \sin \frac{2\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+2} \sin \frac{2\pi}{2^{n+2}}} = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{2\pi}{2^{n+2}}} = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+2}}}$

et $\boxed{\text{aire}(\Pi_n) = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \text{aire}(\Pi_{n+1})}$

(v) De la question précédente on déduit: $\prod_{k=0}^n \text{aire}(\Pi_k) = \prod_{k=0}^n \cos(\frac{\pi}{2^{k+2}}) \prod_{k=0}^n \text{aire}(\Pi_{k+1})$ et après simplification:

$\text{aire}(\Pi_0) = \prod_{k=0}^n \cos(\frac{\pi}{2^{k+2}}) \text{aire}(\Pi_{n+1})$

L'aire de Π_0 vaut 2 (carré de coté $\sqrt{2}$) et la limite de Π_n vaut π (cercle de rayon 1)

On en déduit $\boxed{l_{\frac{\pi}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \cos(\frac{\pi}{2^{k+2}}) = \frac{2}{\pi}}$

Exercice 3

1. a) Equation de la droite (D_M) passant par le point M de coordonnées (α, β) et orthogonale à $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\alpha X + \beta Y = \alpha^2 + \beta^2}$$

b) Carré de la distance du point I de coordonnées $(a, 0)$ à (D_M) : $\boxed{\frac{(a\alpha - (\alpha^2 + \beta^2))^2}{\alpha^2 + \beta^2}}$

c) (D_M) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si la distance de I à (D_M) est égale à a , soit

$$\boxed{(a\alpha - (\alpha^2 + \beta^2))^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

2. Lorsque la condition précédente est remplie, la droite (D_M) est tangente au cercle et M est la projection orthogonale de O sur (D_M) .

Réciproquement, si (D) est une tangente à $\mathcal{C}$, et si on note M la projection orthogonale de O sur (D) , alors $(D) = (D_M)$.

(Γ) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (α, β) tels que la condition du 1.c) soit vérifiée, d'où une équation cartésienne de (Γ) : $\boxed{(aX - (X^2 + Y^2))^2 = a^2(X^2 + Y^2)}$

En posant $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$ et en reportant dans la relation précédente on obtient $r = 0$ ou $r = a(1 + \cos \theta)$ ou $r = a(-1 + \cos \theta)$.

Le changement de variable $\theta \mapsto \pi + \theta$ nous montre que les deux courbes paramétrées $r = a(1 + \cos \theta)$ et $r = a(-1 + \cos \theta)$ ont mme support. Elles contiennent l'origine ($r = 0$).

On en déduit une équation polaire de (Γ) : $\boxed{r = a(1 + \cos \theta)}$ (On reconnait une cardiode)

3.

4. a)

b) On cherche à calculer l'aire de la surface définie par la relation

$$(*) \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta) \\ 0 \leq r \leq a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) \end{array} \right)$$

pour θ variant dans un intervalle de longueur 2π .

Etudions le signe de $a(1 + \cos \theta) - a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$:

$$a(1 + \cos \theta) - a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) = a(\cos \theta - \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) = -2a \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\theta - \frac{\pi}{3}).$$

On fait varier θ dans l'intervalle $[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$

Si $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ alors $a(1 + \cos \theta) \leq a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$ et (*) est équivalente à $0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta)$.

Si $\theta \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$ alors $a(1 + \cos \theta) \geq a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$ et (*) est équivalente à $0 \leq r \leq a(1 + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$

L'aire recherchée est alors:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr \right) d\theta + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\int_0^{a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))} r \, dr \right) d\theta$$

On obtient une aire égale à $\boxed{a^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3} \right)}$