

Exercice 1

1. Dans les deux cas la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont claires (découlant immédiatement de la linéarité et de la positivité de l'intégration). En outre si $\|f\| = 0$ ou $\|f'\| = 0$ il vient $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$. Comme f est $\mathcal{C}^1$, $t \mapsto |f'(t)|$ est continue sur $[0, 1]$ et le théorème de positivité stricte de l'intégration implique que f' est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc f y est constante et finalement nulle puisque $f(0) = 0$. $\square$

On a évidemment $\|f\| \leq 4|f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt = 2\|f'\|$ et de même $\|f'\| \leq 2\|f\|$. $\square$

2. Notons $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ la norme L^1 (bien une norme sur E). Envisageons la suite (f_n) définie par $f_n(t) = t^n$ bien élément de E . Il vient (pour $n \geq 1$) $\|f_n\| = 2$ et $\|f\|_1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi la suite (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme L^1 mais pas pour la norme $\|\cdot\|$. $\square$

Exercice 2

1. • $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur $J \quad \forall x \in I$
 • $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $J \quad \forall t \in I$
 • Pour tout segment $K = [a, b] \subset I$ il existe une fonction φ_K positive et intégrable sur J telle que $|g(x, t)| \leq \varphi_K(t)$ pour tout $x \in K$ et pour tout $t \in J$.

Remarquons que l'hypothèse a priori de l'intégrabilité de $t \mapsto g(x, t)$ pour tout $x \in I$ n'est pas nécessaire car assurée par les hypothèses ci-dessus.

2. Les deux premières hypothèses sont clairement satisfaites. Quant à la troisième on a non seulement une domination locale en x mais une domination globale par $t \mapsto \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ bien intégrable sur $]0, +\infty[$. $\square$

3. Il vient immédiatement que $f_2(0) = 0$ et $f_2(x) = 1$ pour $x > 0$.

Ainsi f_2 est continue sur $]0, +\infty[$ mais pas sur $[0, +\infty[$.

L'hypothèse de domination locale en x est bien assurée sur $]0, +\infty[$: si $0 < a < b$ on a $|g_2(x, t)| \leq be^{-at}$ pour $x \in [a, b]$ bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par contre la discontinuité en 0 prouve que l'hypothèse de domination locale n'est pas réalisée sur un segment $[0, a]$. $\square$

Exercice 3

Le paramétrage $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$ pour θ variant de $-\pi$ à π fournit immédiatement $\int_{\gamma^+} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi$. $\square$

Remarque : Cette forme différentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ et fermée (vérification immédiate) sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On vérifie facilement qu'elle ne se prolonge pas par continuité en $(0, 0)$. Ainsi Ω est le plus grand ouvert sur lequel elle est fermée. Or l'ouvert Ω n'est pas étoilé donc le théorème de Poincaré ne peut s'appliquer ce qui explique que la circulation de ω sur le cercle unité (pourtant bien inclus dans Ω sur lequel ω est fermée) n'est pas nulle.

Problème

1. $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I de manière à assurer l'existence de $\|f_n\|_\infty$ et si $\sum \|f_n\|$ converge.

Si tel est le cas, pour tout $x \in I$ on a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et ainsi la série $\sum |f_n(x)|$ converge par principe de comparaison des séries à termes positifs. $\square$

2. Supposons que $\sum f_n$ converge normalement sur I . Pour $x \in I$ la série $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge puisque $\mathbb{R}$ est complet. Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Il vient :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \stackrel{\text{DEF}}{=} \varepsilon_n \quad \forall x \in I \quad \forall p \geq 1 \quad \text{avec } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En fixant x et en faisant tendre p vers $+\infty$ il vient $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = |R_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall x \in I$

Ce qui est la définition même de la convergence uniforme sur I de $\sum f_n$. $\square$

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}$ ce qui prouve que la série $\sum f_n(x)$ ne converge pas absolument car $\sum |f_n(x)|$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont de même nature par principe de comparaison des séries à termes positifs. $\square$

Par ailleurs $n \mapsto \frac{x^2 + n}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$ décroît vers 0 de sorte que la série $\sum f_n(x)$ converge en tant que série alternée relevant du théorème spécial. $\square$

En outre le théorème spécial montre que, pour tout x de $[0, 1]$ on a $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2} = \varepsilon_n$

ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$. $\square$

On a donc là un exemple de série convergeant uniformément mais pas normalement sur un intervalle.

4. La série $\sum f_n$ avec $f_n(x) = x^n$ converge absolument sur $] -1, 1[$ mais pas uniformément. En effet si tel était le cas, comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = 1$, le théorème du double passage à la limite prouverait que la série $\sum 1$ converge. $\square$

Plus directement $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ donc $\sup_{x \in]-1, 1[} R_n(x) = +\infty$ et la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $] -1, 1[$. $\square$

5. La suite (α_n) est évidemment bornée par α_1 et $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \alpha_1 x^n$ pour $x \in [0, 1]$ donc $\sum f_n(x)$ converge par principe de comparaison des séries à termes positifs. $\square$

6. Une étude des variations de f_n montre immédiatement que $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{\alpha_n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$ donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{en}$ de sorte que $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ converge (par principe de comparaison des séries à termes positifs). $\square$

7. • Pour $x \in I$, comme déjà noté, on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

- De sorte que, pour tout $x \in I$, en vertu de la décroissance de la suite positive (α_n) :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_{n+1} x^k (1-x) = \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}$$

Ainsi si la suite (α_n) décroît vers 0 alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$. $\square$

- Réciproquement supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I de sorte que $\sup_{x \in I} |R_n(x)| = \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{DEF}} 0$.

Comme la suite (α_n) est une suite décroissante minorée par 0, elle admet une limite $\ell \geq 0$ et $\alpha_k \geq \ell$ pour tout k .

$$\text{Il vient alors } \ell x^{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) = R_n(x) = |R_n(x)| \leq \varepsilon_n \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En fixant n et en faisant tendre x vers 1^- il vient $\ell \leq \varepsilon_n$ pour tout n .

Puis en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $\ell \leq 0$ donc $\ell = 0$ car $\ell \geq 0$.

Ainsi la réciproque est-elle vraie et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite (α_n) tend vers 0. $\square$

8. • Avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$ la série $\sum f_n$ converge normalement sur I d'après la question 6. $\square$

- Avec $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$ la série $\sum f_n$ converge simplement sur I mais pas uniformément par les questions 5 et 7. $\square$

- Avec $\alpha_n = \frac{1}{\ln n}$ la suite (α_n) décroît vers 0 mais la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ ne converge pas. En effet comme la fonction

$x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est continue positive et décroissante au voisinage de $+\infty$, la série est de même nature que $\int^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

elle-même de même nature que $\int^{+\infty} \frac{du}{u}$ (par le $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme $x \mapsto u = \ln x$ d'un voisinage de $+\infty$ sur un voisinage de $+\infty$) donc divergente.

Ainsi $\sum f_n$ converge uniformément mais pas normalement sur I par les questions 6 et 7. $\square$

9. $(\text{CV normale}) \implies (\text{CV uniforme}) \implies (\text{CV simple})$ (toutes réciproques fausses)
 $(\text{CV normale}) \implies (\text{CV absolue}) \implies (\text{CV simple})$ ($\mathbb{R}$ est complet) (toutes réciproques fausses)

Aucune implication entre convergence uniforme et convergence absolue.

————— FIN —————