

Thèmes abordés. Polynômes, nombres complexes, réduction des endomorphismes.

Ce problème propose de démontrer une sorte de théorème de Rolle pour les polynômes complexes. La démonstration repose sur des calculs astucieux et à peu près rien d'autre, ce qui n'est pas sans rappeler la deuxième épreuve de ce même concours en 2008.

Mais le principal défaut de ce problème n'est pas là. Tel qu'il est présentement formulé, il ne se résout pas de manière cohérente. En particulier, la question 13 ne découle pas des questions 8 et 9. De même, la question 17 ne découle pas de la question 14 sous cette forme : en effet, le théorème nécessite de montrer l'existence d'une racine de P' dans un certain disque *fermé* ; il est donc logique de remplacer les disques ouverts par des disques fermés tout au long du problème.

Le présent corrigé propose une reformulation de l'énoncé des questions 8, 9 13 et 14 qui permet leur résolution.

Question 1. La linéarité de A_z découle immédiatement de celle de la dérivation. Il reste à montrer que A_z prend ses valeurs dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Pour cela, considérons un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^N u_k X^k$ quelconque de $\mathbb{C}_n[X]$. Le calcul donne

$$A_z P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} z u_{k+1} (k+1) X^k - \sum_{k=1}^{n-1} k u_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} n u_k X^k,$$

ce qui prouve que $A_z P(X)$ appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Question 2. Il suffit de développer le calcul pour obtenir la formule demandée, en n'oubliant pas de remplacer n par $n-1$ quand on applique A_{z_1} à $A_{z_2} P$ dans l'expression du membre de gauche – l'énoncé est particulièrement insistant sur ce point. Le calcul donne

$$A_{z_1}(A_{z_2} P)(X) = (z_1 - X)(z_2 - X)P''(X) + (n-1)(z_1 + z_2 - 2X)P'(X) + n(n-1)P(X)$$

et on constate que l'expression obtenue est symétrique en (z_1, z_2) .

Question 3. Pour une raison mystérieuse, l'énoncé ne demande pas directement de trouver le noyau de l'application.

Première méthode : on suit l'indication de l'énoncé. La famille $\mathcal{F} = ((X-z)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ car ses éléments sont non nuls et ont tous des degrés distincts. Comme cette famille compte $n+1$ vecteurs et $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension $n+1$, la famille \mathcal{F} est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Un calcul direct donne $A_z((X-z)^k) = (n-k)(X-z)^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, le polynôme $(X-z)^n$ est dans $\text{Ker}(A_z)$. De plus, le rang de A_z est celui de la famille $(A_z((X-z)^k))_{0 \leq k \leq n}$, c'est-à-dire celui de la famille $\mathcal{G} = ((n-k)(X-z)^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ c'est-à-dire n car cette famille est libre par le même argument que ci-dessus.

On en déduit, par la formule du rang, que A_z a un noyau de dimension 1 si bien que ce noyau est la droite engendrée par $(X-z)^n$.

De plus, comme le rang de A_z est égal à la dimension de son espace d'arrivée $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, cette application linéaire est surjective : $\text{Im}(A_z) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Deuxième méthode : on trouve directement les éléments du noyau. Soit $P \in \text{Ker}(A_z)$. Supposons P non nul. L'égalité $nP(X) = (X-z)P'(X)$ montre que z est une racine de P . Si P possédait une racine α autre que z , alors α serait aussi une racine de P' avec le même ordre de multiplicité, ce qui n'est pas possible. On en déduit que z est l'unique racine de P . Comme P est scindé sur \mathbb{C} , il est de la forme $\lambda(X-z)^k$, où k est un entier dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et λ est un nombre complexe non nul.

Le calcul de $A_z((X-z)^k)$ montre alors que k vaut forcément n . Il n'y a alors plus qu'à vérifier que $(X-z)^n$ est bien un élément du noyau de A_z pour conclure.

On en déduit ensuite le rang de A_z par la formule du rang. On obtient ainsi la surjectivité de A_z .

Question 4. Le calcul de la question précédent montre que la famille \mathcal{F} est une base de vecteurs propres pour \widehat{A}_z , chaque $(X-z)^k$ étant associé à la valeur propre $n-k$. En particulier, les espaces propres sont tous de dimension 1 et l'endomorphisme \widehat{A}_z de $\mathbb{C}_n[X]$ est diagonalisable.

Question 5. On sait que E laisse stables les espaces propres de \widehat{A}_z et que ces derniers sont les droites engendrées par les $(X-z)^k$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe λ_k dans \mathbb{C} vérifiant l'égalité $E((X-z)^k) = \lambda_k(X-z)^k$.

On obtient les représentations matricielles suivantes

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\widehat{A}_z) = \text{diag}(n, n-1, \dots, 1, 0) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{F}}(E) = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_n).$$

On introduit ensuite l'unique polynôme interpolateur de Lagrange L de $\mathbb{C}_n[X]$ vérifiant l'égalité $L(n-k) = \lambda_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On observe que le polynôme L envoie la matrice diagonale $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\widehat{A}_z)$ sur $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(E)$, si bien que L envoie \widehat{A}_z sur E .

Question 6. L'indication donnée dans l'énoncé est bizarre. Ce que l'auteur avait en tête est l'équivalence suivante

$$z \in \mathcal{C} \iff |z - z_0|^2 = R^2 \iff (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \iff z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 = R^2.$$

Remarquons maintenant que l'appartenance de 0 à \mathcal{C}^+ permet d'affirmer que 0 n'appartient pas à \mathcal{C} , si bien que tout élément de \mathcal{C} est non nul. On peut aussi écrire $|z_0| > R$, ce qui prouve notamment que z_0 n'est pas nul.

Le but est de montrer que $f(\mathcal{C})$ est un cercle. Pour cela, on va montrer que l'équation écrite ci-dessus pour le cercle \mathcal{C} équivaut à une équation du même type pour $\frac{1}{z}$. On va obtenir une telle équation en divisant par $z\bar{z}$.

$$z \in \mathcal{C} \iff 1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - R^2}{z\bar{z}} = 0.$$

Notons maintenant $\alpha = |z_0|^2 - R^2$ et remarquons que ce nombre est strictement positif, ce qui permet de diviser par ce nombre.

$$z \in \mathcal{C} \iff \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{z_0}{\alpha} \times \frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\alpha} \times \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

On factorise une expression de la forme $\left(\frac{1}{z} - \omega\right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \bar{\omega}\right)$, un peu comme lors d'une mise sous forme canonique, de manière à se rapprocher de la forme initiale d'une équation de cercle :

$$z \in \mathcal{C} \iff \left(\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{z_0}{\alpha}\right) = \frac{R^2}{\alpha^2}.$$

Ainsi, l'appartenance de z à \mathcal{C} équivaut à l'appartenance de $\frac{1}{z}$ au cercle de centre $\frac{\bar{z}_0}{\alpha}$ et de rayon $\frac{R}{\alpha}$. Ce dernier cercle est donc précisément l'ensemble $f(\mathcal{C})$.

On connaît l'inégalité $\left|\frac{\bar{z}_0}{\alpha}\right| > \frac{R}{\alpha}$, qui prouve que 0 appartient à $f(\mathcal{C})^+$.

Question 7. L'indication est effroyablement compliquée. Il suffit de reprendre le calcul précédent avec des inégalités strictes à la place des égalités :

$$z \in \mathcal{C}^- \iff z\bar{z} - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 < R^2 \iff \left(\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{z_0}{\alpha}\right) < \frac{R^2}{\alpha^2} \iff f(z) \in f(\mathcal{C})^-.$$

Cette équivalence prouve l'égalité demandée : $f(\mathcal{C}^-) = f(\mathcal{C})^-$, ainsi que $f(\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}) = f(\mathcal{C})^- \cup f(\mathcal{C})$, ce qui servira plus loin.

Question 8. Commençons par modifier l'énoncé de cette question en remplaçant les disques ouverts \mathcal{C}^- et $f(\mathcal{C})^-$ par les disques fermés $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$ et $f(\mathcal{C})^- \cup f(\mathcal{C})$.

Les z_i appartiennent à $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$ et 0 appartient à \mathcal{C}^+ donc les $f(z_i)$ sont bien définis et appartiennent au disque fermé $f(\mathcal{C})^- \cup f(\mathcal{C})$. Notons ω et R le centre et le rayon de ce dernier disque. On connaît l'inégalité $|z_i - \omega| < R$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En remarquant l'égalité $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i) - \omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(z_i) - \omega)$, on n'a plus qu'à appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(z_i) - \omega \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(z_i) - \omega| \leq \frac{1}{n} \times nR = R.$$

Tout ceci montre que le nombre $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$ est bien défini et appartient à $f(\mathcal{C})^- \cup f(\mathcal{C})$ (on redémontre ici le fait que les disques sont des parties convexes du plan). En particulier, il est non nul puisque 0 est dans $f(\mathcal{C})^+$. Le nombre δ_0 est donc bien défini et il appartient à $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$ car c'est l'image par f de l'élément $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i}$ de $f(\mathcal{C}^-) \cup f(\mathcal{C})$.

Question 9. De même, dans cette question, on remplace le disque ouvert \mathcal{C}^- par le disque fermé $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$.

On applique la question précédente en remplaçant les z_i par les $z_i - \xi$ et le cercle \mathcal{C} par le translaté du présent cercle \mathcal{C} par la translation de vecteur $-\xi$.

Question 10. Dérivons le polynôme P :

$$P'(X) = \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (X - z_k).$$

On trouve donc $\frac{P'(\xi)}{P(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi - z_i} = \frac{n}{\xi - \delta_\xi}$.

Ainsi, si $P'(\xi)$ n'est pas nul, on en déduit l'égalité $\delta_\xi = \xi - n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)}$.

Question 11. Ceux des z_i qui sont racines de P' sont évidemment des racines de $A_z P$. Réciproquement, une racine de P' qui est une racine de $A_z P$ est automatiquement une racine de P donc l'un des z_i .

Soit maintenant ξ un nombre complexe qui n'est pas une racine de P . L'égalité $A_z P(\xi) = 0$ équivaut à $n \frac{P(\xi)}{P'(\xi)} = \xi - z$, donc à $\delta_\xi = z$ d'après la formule de la question précédente.

Question 12. Notons $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j$. On sait que le polynôme P se met sous la forme

$$P(X) = X^n - n\alpha X^{n-1} + Q(X),$$

pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré au plus $n - 2$. En appliquant A_z , on trouve

$$A_z P(X) = n(z - \alpha)X^{n-1} + R(X),$$

pour un certain polynôme $R(X)$ de degré au plus $n - 2$, ce qui prouve l'équivalence demandée :

$$\deg(A_n P) < n - 1 \iff z = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j.$$

Question 13. Dans cette question, on remplace le disque ouvert \mathcal{C}_1^- par le disque fermé $\mathcal{C}_1^- \cup \mathcal{C}_1$ et on suppose que z appartient à \mathcal{C}_1^+ .

Par le même argument de convexité qu'à la question 8, le nombre $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j$ est un élément de $\mathcal{C}_1^- \cup \mathcal{C}_1$, si bien qu'il est différent de z . D'après ce qu'on vient de démontrer, on en déduit que $A_z P$ est de degré au moins $n - 1$. Et comme $A_z P$ appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, il est de degré exactement $n - 1$.

Maintenant, soit ξ une racine du polynôme $A_z P(X)$. Si ξ est l'un des z_i , alors il est dans $\mathcal{C}_1^- \cup \mathcal{C}_1$ par hypothèse. Dans le cas contraire, d'après le résultat de la question 11, l'égalité $\delta_\xi = z$ est vérifiée.

D'après le résultat de la question 9, il est impossible que ξ soit dans \mathcal{C}_1^+ car sinon, l'élément $\delta_\xi = z$ serait dans $\mathcal{C}_1^- \cup \mathcal{C}_1$, ce que les hypothèses interdisent.

On en déduit que ξ est dans $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1^-$.

Question 14. Dans cette question encore, on remplace \mathcal{C}^- par le disque fermé $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$.

Par l'absurde, supposons que z'_1, \dots, z'_n soient tous dans \mathcal{C}^+ . En particulier, d'après le résultat de la question précédente, le polynôme $A_{z'_n} P(X)$ est de degré $n - 1$ et ses zéros sont tous dans $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$.

On applique alors à nouveau le résultat de la question précédente en remplaçant le triplet (n, P, z'_n) par le triplet $(n - 1, A_{z'_n} P, z'_{n-1})$. On obtient que $A_{z'_{n-1}} A_{z'_n} P(X)$ est de degré $n - 2$ et que ses $n - 2$ zéros sont tous dans $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$.

Par itération de ce procédé, on montre que $A_{z'_k} \cdots A_{z'_n} P$ est de degré exactement $k - 1$ pour tout $k \in [1, n]$. En particulier, le polynôme $A_{z'_1} \cdots A_{z'_n} P$ est de degré 0, ce qui contredit l'hypothèse d'apolarité.

On a donc montré par l'absurde que le polynôme Q possède au moins une racine dans le disque fermé $\mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}$.

Question 15. On calcule l'intégrale directement :

$$\int_0^1 T(a + t(b - a)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} \int_0^1 (a + t(b - a))^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}.$$

On obtient donc la formule souhaitée en choisissant les b_i de manière à avoir $b_{n-1-k} = \frac{(-1)^k}{k+1} \times \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$.
 Il suffit pour cela de prendre $b_i = \frac{(-1)^{n-1-i}}{n-i} \times \frac{b^{n-i} - a^{n-i}}{b-a}$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Question 16. On fait apparaître la formule du binôme.

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b_i X^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} \times \frac{1}{n-i} \times \frac{b^{n-i} - a^{n-i}}{b-a} (-1)^{n-1-i} X^i \\ &= -\frac{1}{n(b-a)} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (b^{n-i} - a^{n-i}) (-1)^{n-i} X^i = -\frac{1}{n(b-a)} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{(b^{n-i} - a^{n-i})}_{\text{nul pour } i=n} (-1)^{n-i} X^i \\ &= -\frac{1}{n(b-a)} \left((X-b)^n - (X-a)^n \right) = \frac{(X-a)^n - (X-b)^n}{n(b-a)}. \end{aligned}$$

Question 17. La formule admise permet d'écrire ceci :

$$(-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} A_{t_1} A_{t_2} \cdots A_{t_{n-1}} \Delta(X) = \int_0^1 P'(a + t(b-a)) dt = \frac{P(b) - P(a)}{b-a} = 0,$$

donc $\Delta(X)$ est apolaire par rapport à $P'(X)$.

On en déduit, en appliquant la propriété de la question 14, que P' possède au moins une racine dans chaque disque fermé contenant toutes les racines de Δ .

La résolution de l'équation $(z-a)^n = (z-b)^n$, utilisant les racines n -ièmes de l'unité, montre que les racines de Δ sont les nombres de la forme $\frac{a+b}{2} + i \frac{a-b}{2} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où k décrit $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On sait en outre que la fonction cotangente est décroissante sur $]0, \pi[$.

On remarque de plus l'égalité $\cotan\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = -\cotan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

On en déduit que $\left| \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|$ est majoré par $\cotan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Les racines du polynôme Δ appartiennent donc au disque fermé centré en $\frac{a+b}{2}$ ayant pour rayon $\cotan\left(\frac{\pi}{n}\right)$, si bien que le polynôme P' possède au moins une racine dans ce disque : le théorème proposé est démontré.