Mines - MP - 2022 - Sujet 2

Fabrice Castel ; lycée Fénelon-Sainte-Marie ; Paris 8ème

I Questions préliminaires

1. Notons $\mathbb{K}[B]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des polynômes en B.
En tant que limite de polynômes en B, e^B appartient à l'adhérence $\overline{\mathbb{K}[B]}$.
Or $\mathbb{K}[B]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc est fermé.
Donc $e^B \in \mathbb{K}[B]$: e^B est un polynôme en B.
Or les puissances de B commutent avec A puis tout polynôme en B commute avec A.
Donc $\boxed{e^B \text{ commute avec } A}$.

Rem. *Autre point de vue.*
On peut définir $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$, linéaire.
Donc Ker (φ) est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie.
(On pouvait aussi évoquer la continuité de φ).
Puisque Ker (φ) est fermé et contient $\mathbb{K}[B]$, il contient $\overline{\mathbb{K}[B]}$, donc contient e^B.
Donc à nouveau, $\boxed{e^B \text{ commute avec } A}$.

2. Considérons l'application bilinéaire $\pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array}$. Alors $g = \pi(f_{A+B},\, f_{(-B)})$.
Or f_{A+B} et $f_{(-B)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$g' = \pi(f'_{A+B},\, f_{(-B)}) + \pi(f_{A+B},\, f'_{(-B)}).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.
En utilisant la question **1** au couple $(B,\, t(A+B))$, il vient : $Be^{t(A+B)} = e^{t(A+B)}B$. D'où :

$$\begin{aligned} g'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} + e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB} \\ &= (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - Be^{t(A+B)}e^{-tB} \\ &= Ag(t). \end{aligned}$$

On en déduit que g vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = a \cdot y(t) \\ y(0) = I_n \end{cases}$$

où l'application $a : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ est linéaire (indépendante de t) et l'inconnue y appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
L'application f_A vérifie ce même problème de Cauchy, donc par unicité de la solution, $g = f_A$.
D'où $f_{A+B} = gf_B = f_Af_B$, autrement dit :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}}.$$

3. Nous avons déjà vu que $f_A f_B$ était dérivable de dérivé $Af_Af_B + f_ABf_B$.
De la même façon, $Af_Af_B + f_ABf_B$ est à son tour dérivable de dérivée :

$$(f_Af_B)'' = A^2f_Af_B + 2Af_ABf_B + f_AB^2f_B.$$

De son côté, la fonction f_{A+B} est deux fois dérivable de dérivée $(A+B)^2f_{A+B}$.
L'égalité en 0 de ces deux dérivées secondes fournit :

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2.$$

En développant $(A+B)^2$ et après simplification, on obtient $AB = BA$.
Donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ commutent}}$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\varepsilon > 0$.
Par convergence de $\sum \dfrac{A^k}{k!}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ satisfait : $\|R_n\| < \varepsilon$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\|e^A\| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A^k\|}{k!} + \|R_n\| && \text{(par inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} + \varepsilon && \text{(par sous-multiplicativité de } \|\ \|\text{)}\\
&\leqslant e^{\|A\|} + \varepsilon && \text{(car tous les termes de la série } e^{\|A\|} \text{ sont positifs)}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}.}$$

5. Nous voyons A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire d'éléments diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$.
Commençons par remarquer que e^T est limite de matrices triangulaires supérieures donc est elle-même triangulaire supérieure. Ses coefficients diagonaux valent $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
Donc son déterminant vaut :

$$\det(e^T) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = e^{\mathrm{tr}(T)}.$$

Or l'égalité $A = PTP^{-1}$ entraîne $e^A = Pe^TP^{-1}$, donc $\det(e^T) = \det(e^A)$.
L'égalité $A = PTP^{-1}$ entraîne également $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(A)$, d'où :

$$\boxed{\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}}.$$

II Formule de trotter - Kato

6. Les calculs suivants utilisent abondamment la croissance de l'exponentielle réelle.
D'une part :

$$\begin{array}{rcll} \|X_k\| & = & \|e^{\frac{A}{k}}e^{\frac{B}{k}}\| & \\ & \leqslant & \|e^{\frac{A}{k}}\|\,\|e^{\frac{B}{k}}\| & \text{(par sous-multiplicativité de } \| \ \|) \\ & \leqslant & e^{\frac{\|A\|}{k}}e^{\frac{\|B\|}{k}} & \text{(d'après la question } \mathbf{4}) \\ & \leqslant & e^{\frac{\|A\|+\|B\|}{k}} & \text{(propriété de l'exponentielle réelle),} \end{array}$$

d'autre part,

$$\begin{array}{rcll} \|Y_k\| & = & \|e^{\frac{A+B}{k}}\| & \\ & \leqslant & e^{\frac{\|A+B\|}{k}} & \text{(d'après la question } \mathbf{4}) \\ & \leqslant & e^{\frac{\|A\|+\|B\|}{k}} & \text{(par inégalité triangulaire).} \end{array}$$

7. La fonction h étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, la formule de Taylor Young s'applique :

$$h(t) \underset{t\to 0}{=} h(0) + th'(0) + \underbrace{\frac{t^2}{2}h''(0) + o(t^2)}_{O(t^2)}. \tag{1}$$

Or $h(0) = I_n - I_n = 0$.
D'autre part, $h' = (f_A f_B - f_{A+B})' = Af_A f_B + f_A B f_B - (A+B)f_{A+B}$,
donc $h'(0) = (Af_A(0)f_B(0) + f_A(0)Bf_B(0) - (A+B)f_{A+B}(0) = A + B - (A+B) = 0$.
Dans (1), prenons $t = \dfrac{1}{k}$ avec $k \to \infty$ et remarquons que $h\left(\dfrac{1}{k}\right) = X_k - Y_k$.
Il en résulte que :

$$\boxed{X_k - Y_k \underset{k\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)}.$$

8. Pour tout $i \in [\![0,\, k]\!]$, posons $u_i = X_k^i Y_k^{k-i}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} X_k^k - Y_k^k & = & u_k - u_0 & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}(u_{i+1} - u_i) & \text{(par télescopage)} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}(X_k^{i+1}Y_k^{k-i-1} - X_k^i Y_k^{k-i}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1}(X_k^i X_k Y_k^{k-i-1} - X_k^i Y_k Y_k^{k-i-1}) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} & \text{(par double factorisation)} \end{array}$$

D'après la question **6**, il existe $K \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tel que pour tout $k \geqslant K$, $\|X_k - Y_k\| \leqslant \dfrac{M}{k^2}$.
Désormais, soit $k \geqslant K$ fixé.

$$
\begin{aligned}
\|X_k^k - Y_k^k\| &= \left\| \sum_{i=0}^{k+1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1} \right\| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k+1} \|X_k^i X_k - Y_k Y_k^{k-i-1}\| && \text{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k+1} \|X_k\|^i \, \|X_k - Y_k\| \, \|Y_k\|^{k-i-1} && \text{(par sous-multiplicativité)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k+1} e^{\frac{i}{k}(\|A\|+\|B\|)} \frac{M}{k^2} e^{\frac{k-i-1}{k}(\|A\|+\|B\|)} && \text{(d'après les questions } \mathbf{6} \text{ et } \mathbf{7}) \\
&\leqslant \frac{M}{k} e^{\frac{k-1}{k}(\|A\|+\|B\|)}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $X_k^k - Y_k^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Or pour tout k, $X_k^k = \left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k$ et $Y_k^k = e^{A+B}$. Nous avons donc démontré que :

$$\boxed{\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{A+B}.}$$

III Vers les algèbres de Lie

9. On utilise dans les deux sens la question **5**.

- Soit $M \in \text{Ker (tr)}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(e^{tM}) = e^{\text{tr}(tM)} = e^0 = 1$, donc $e^{tM} \in \mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})} \supset \text{Ker (tr)}$.

- Réciproquement, soit $M \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(e^{tM}) = 1$, mais $\det(e^{tM}) = e^{\text{tr}(tM)}$, donc $\text{tr}(tM) = 0$.
(On utilise ici le fait que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'injectivité de l'exponentielle réelle.)
Ceci est vrai en particulier pour $t = 1$, d'où l'on tire que $\text{tr}(M) = 0$, donc $M \in \text{Ker (tr)}$.
Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})} \subset \text{Ker (tr)}$.
Finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})} = \text{Ker (tr)}}.$$

10. On utilise dans les deux sens le fait que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^t e^M = e^{{}^t M}$.
Ceci provient de la continuité de l'application (linéaire) $M \mapsto {}^t M$.

- Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, ${}^t\left(e^{tM}\right) e^{tM} = e^{t({}^t M)} e^{tM} = e^{-tM} e^{tM} = I_n$, donc $e^{tM} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
(On utilise ici pour la première fois le fait que $-tM$ et tM commutent, d'où $e^{-tM} e^{tM} = I_n$.)
Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \supset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Réciproquement, soit $M \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, ${}^t\left(e^{tM}\right) e^{tM} = I_n$, donc $e^{t({}^t M)} = e^{t(-M)}$.
Dérivons : pour tout $t \in \mathbb{R}$, ${}^t M e^{t({}^t M)} = (-M) e^{t(-M)}$.
En $t = 0$, on obtient : ${}^t M = -M$, donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

11. • Puisque G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, G contient I_n.
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t0} = I_n \in G$, donc $0 \in \mathcal{A}_G$.

• Soient $M \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tM} \in G$.
Par changement de variable, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $e^{s\lambda M} \in G$.
Donc $\lambda M \in \mathcal{A}_G$.

• Soient $M, N \in \mathcal{A}_G$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tM} \in G$ et $e^{tN} \in G$.
Donc pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{\frac{sM}{k}} \in G$ et $e^{\frac{sN}{k}} \in G$.
Or G est un groupe, donc pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(e^{\frac{sM}{k}} e^{\frac{sN}{k}}\right)^k \in G$.
Lorsque k tend vers ∞, G étant fermé, d'après la partie **2**, $e^{s(M+N)} \in G$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
Donc $M + N \in \mathcal{A}_G$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

12. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par commodité, notons $P = e^{tA} \in G$ (car $A \in \mathcal{A}_G$).
Pour tout $s \in \mathbb{R}$,
$$e^{su(t)} = e^{sPBP^{-1}} = e^{P(sB)P^{-1}} = Pe^{sB}P^{-1}.$$
Or $P \in G$ et $e^{sB} \in G$ car $B \in \mathcal{A}_G$.
Comme G est un groupe, on en déduit que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $e^{su(t)} \in G$.
Donc $u(t) \in \mathcal{A}_G$.
Ainsi, $\boxed{u \text{ est à valeurs dans } \mathcal{A}_G}$.

13. Soient A, $B \in \mathcal{A}_G$ et u définie comme à la question **12**.
La fonction u est dérivable par des arguments proches de ceux évoqués à la question **2**.
En outre, $u'(t) = Ae^{tA}Be^{-tB} + e^{tA}B(-A)e^{-tA}$.
Or $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est de dimension finie donc est fermé.
Donc en tant que limite (puisque $u'(t) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{u(t+s) - u(t)}{s}$), $u'(t) \in \mathcal{A}_G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
En particulier, pour $t = 0$, on obtient : $AB - BA \in \mathcal{A}_G$.
Ainsi $\boxed{\mathcal{A}_G \text{ est stable par le crochet de Lie}}$.

14. Soit $M \in \mathcal{A}_G$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tM} \in G$.
Considérons $\gamma : \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & e^{tM} \end{array}$, dérivable de dérivée $\gamma'(t) = Me^{tM}$.
Donc $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$, donc $M \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)}$.

15. *Il faut jouer à la devinette ici pour comprendre ce que le concepteur du sujet avait en tête. Le cours en principe nous permet de dériver $t \mapsto \det(I_n + tM)$ comme la composée de de l'application* det *qui est n-linéaire et les n applications affines $t \mapsto E_i + tM_i$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On obtient :*
$$\delta_M'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(E_1 + tM_1 | \cdots | M_i | \ldots | E_n + tM_n)$$
On en déduit que $\delta_M'(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \det(E_1 | \cdots | M_i | \ldots | E_n) = \mathrm{tr}(M)$.
Au lieu de cela, nous allons suivre les indications.

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. Alors :

$$\det(I_n+tM)=\det(I_n+tT)=\prod_{i=1}^n(1+\lambda_i t)\underset{t\to 0}{=}1+\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)t+o(t),$$

où l'on a développé un polynôme et gardé uniquement le terme constant le terme en t, les autres « entrant » dans le $o(t)$.

Puisque $1=\det(I_n)=\delta_M(0)$, et $\sum_{i=1}^n\lambda_i=\operatorname{tr}(T)=\operatorname{tr}(M)$, on obtient :

$$\delta_M(t)=\delta_M(0)+\operatorname{tr}(M)t+o(t),$$

donc $\boxed{\delta_M \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \delta_M'(0)=\operatorname{tr}(M)}$.

16. *Là encore, le chemin le plus rapide est sans doute de calculer les dérivées partielles premières du déterminant (on obtient immédiatement les cofacteurs).*
On en déduit que pour tous $A,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}\det(A)\cdot H=\operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}(A)H)$.
*Mais bien entendu, la question attendue consiste à utiliser la question **15**.*

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Dérivons l'application δ_M comme la composée $\delta_M=\det\circ\gamma$ avec $\gamma:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ t&\longmapsto&I_n+tM\end{array}$.
On obtient d'après la question **15**,

$$\operatorname{tr}(M)=(\delta_M)'(0)=\mathrm{d}\det(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=\mathrm{d}\det(I_n)\cdot M.$$

Ceci étant vrai pour tout matrice M, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{d}\det(I_n)=\operatorname{tr}}.$$

17. • Soit $M\in\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R}))$.
Alors il existe $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$ dérivable tel que $\gamma(0)=I_n$ et $\gamma'(0)=M$.
Or $\det\circ\gamma$ est constant sur 1 par définition de $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$.
Donc en dérivant, on obtient : $\mathrm{d}\det(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=0$, autrement dit $\mathrm{d}\det(I_n)\cdot M=0$.
D'après la question **16**, il vient donc : $\operatorname{tr}(M)=0$.
Ainsi, $M\in\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})=\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})}$ d'après la question **9**.
Donc $\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R}))\subset\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})}$.
Avec la question **14**, il vient que $\boxed{\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_{\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})}}$.

• Soit $M\in\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
Alors il existe $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable tel que $\gamma(0)=I_n$ et $\gamma'(0)=M$.
Notons $f:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ A&\longmapsto&{}^tAA\end{array}$. Cette application peut se décomposer en : $f=b\circ a$ avec $a:A\mapsto(A,A)$ linéaire et $b:(A,B)\mapsto{}^tAB$ bilinéaire.
On en déduit que f est différentiable comme composée d'applications différentiables et :

$$\forall A,H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f(A)\cdot H=\mathrm{d}b(a(A))\circ\mathrm{d}a(A)\cdot H=\mathrm{d}b(A,A)\cdot(H,H)={}^tHA+{}^tAH.$$

En particulier,

$$\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f(I_n)\cdot H={}^tH+H.$$

Or $f\circ\gamma$ est constant sur I_n par définition de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Donc en dérivant, on obtient : $\mathrm{d}f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=0$, autrement dit $\mathrm{d}f(I_n)\cdot M=0$.
D'après ce que l'on vient de voir, on obtient donc : ${}^tM+M=0$.
Ainsi, $M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$ d'après la question **10**.
Donc $\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))\subset\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$.
Avec la question **14**, il vient que $\boxed{\mathcal{T}_{I_n}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}}$.

IV Comportement asymptotique

18. Le polynôme caractéristique χ_A vaut $(X-\alpha)(X-\beta)^2$.
Celui-ci annule A d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
De plus, $\alpha \neq \beta$, donc $(X-\alpha) \wedge (X-\beta)^2 = 1$. Appliquons le lemme des noyaux :

$$\mathrm{Ker}\,(A-\alpha I_3) \oplus \mathrm{Ker}\,((A-\beta I_3)^2) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Puisque α est valeur propre simple, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-\alpha I_3)) = 1$.
Soit u engendrant $\mathrm{Ker}\,(A-\alpha I_3)$. Ainsi, $Au = \alpha u$.
Soit $v \in \mathrm{Ker}\,(A-\beta I_3) \setminus \{0\}$ (puisque β est valeur propre). Ainsi, $Av = \beta v$.
D'après la somme directe ci-dessus, $\dim(\mathrm{Ker}\,((B-\alpha I_3)^2)) = 2$.
On complète (v) en une base (v, w) de $\mathrm{Ker}\,((B-\alpha I_3)^2)$.
Il existe alors $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $Aw = av + bw$.

Notons $P = (u|v|w) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Puisque $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A) = \alpha + 2\beta$ (car $\chi_A = X^3 - \mathrm{tr}(A)X^2 + \cdots$), $b = \beta$.

Ainsi, $\boxed{A \text{ est semblable à une matrice } T \text{ de la forme } T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}}$.

Alors, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & an\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

L'hérédité repose sur le calcul $\begin{pmatrix} \beta^n & an\beta^{n-1} \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{n+1} & a(n+1)\beta^n \\ 0 & \beta^{n+1} \end{pmatrix}$.

Puis, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tT} = I_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tT)^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(t\alpha)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} & at \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(t\beta)^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(t\beta)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}.$$

Alors, $e^{tA} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ si et seulement si $e^{tT} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ si et seulement si $e^{t\alpha} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $e^{t\beta} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.
Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{tz} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) < 0$.

Donc $\boxed{e^{tA} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \text{ et } \mathrm{Re}(\beta) < 0}$.

19. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Re}(\mu) \leqslant \mathrm{Re}(\lambda)$.
Soit V un vecteur propre associé à λ. Alors pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}\right) V = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k V}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k \lambda^k V}{k!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right) V.$$

Par continuité de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MV$ d'une part et $z \in \mathbb{C} \mapsto zV$ d'autre part,
on en déduit par passage à la limite : $f_A(t)V = e^{tA}V = e^{t\lambda}V$.
Or par hypothèse, $f_A(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, donc $f_A(t)V \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ par continuité de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MV$,
donc $e^{t\lambda}V \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, d'où $e^{t\lambda} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ (car $V \neq 0$), et donc $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Re}(\alpha) < 0}$.

20. Partons de la décomposition $\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$.
Puisque les polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers deux à deux lorsque λ parcourt $\mathrm{Sp}(A)$, d'après lemme des noyaux :

$$\mathrm{Ker}\,(\chi_A(A)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}\,((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}).$$

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A, donc $\mathrm{Ker}\,(\chi_A(A)) = \mathbb{C}^n$.
Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\chi_A(A)) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} F_\lambda}.$$

21. • Le sous-espace F_λ est u-stable en tant que noyau d'un polynôme en u.
Considérons u_λ l'endomorphisme induit sur F_λ.
Par définition de F_λ, u_λ est annulé par le polynôme $(X-\lambda)^{m_\lambda}$, donc $\mathrm{Sp}(u_\lambda) = \{\lambda\}$.
Alors l'endomorphisme $n_\lambda = u_\lambda - \lambda \mathrm{id}_{F_\lambda}$ est de spectre $\{0\}$ donc est nilpotent.

• Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, soit $\mathcal{B}_\lambda$ une base de $F_\lambda \subset \mathbb{C}^n$.
Notons $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$ qui forme une base de $\mathbb{C}^n$.
Ecrivons dans une matrice P en colonne les n vecteurs de $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathcal{B}_\lambda$.
Ceci permet la réduction sous forme de matrice diagonale par blocs de A :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) \\
&= \mathrm{diag}\,(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_\lambda}(u_\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)) \\
&= \underbrace{\mathrm{diag}\left(\lambda_{I_{m_\lambda}}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right)}_{D} + \underbrace{\mathrm{diag}\,(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_\lambda}(n_\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u))}_{N}.
\end{aligned}$$

La matrice D est diagonale et la matrice N, diagonale par blocs nilpotents, est elle-même nilpotente.
De plus, les deux matrices D et N sont diagonales par blocs et les blocs correspondants commutent (puisque ceux de D sont des homothéties). Donc $DN = ND$.
Enfin, comme on l'a vu, le spectre de D est le même que celui de A, les valeurs propres ayant même multiplicité, donc $\chi_D = \chi_A$.
$\boxed{\text{On a donc bien trouvé des matrices } (P,\, D,\, N) \text{ vérifiant les conditions demandées}}$.

22. Soit $(i,j) \in [\![1,\, n]\!]^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
v_{ij}(t) &= {}^tE_i e^{tA} E_j \\
&= {}^tE_i P P^{-1} e^{tA} P P^{-1} E_j \\
&= {}^tE_i P e^{tP^{-1}AP} P^{-1} E_j \\
&= {}^tE_i P e^{t(D+N)} P^{-1} E_j \\
&= {}^tE_i P e^{tD} e^{tN} P^{-1} E_j (\text{car } N \text{ et } D \text{ commutent})
\end{aligned}$$

Mais $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \dfrac{N^k}{k!}$ car N est nilpotente.
Posons $p = n-1$.
Donc les coefficients de N sont des polynômes en t de degré au plus p, donc sont en $O(t^p)$.
Les coefficients de e^{tD} sont nuls ou sont des $e^{\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, donc sont en $O(e^{\alpha t})$.
Donc, par définition du produit matriciel, les coefficients de $e^{tD}e^{tN}$ sont en $O(t^p e^{\alpha t})$.
De même, le produit par les matrices constantes ${}^tE_iP$ et $P^{-1}E_j$ n'y change rien.
Ainsi, $\boxed{v_{ij}(t) = O(t^p e^{\alpha t})}$.

23. Supposons que $\alpha < 0$. D'après la question **22**, pour tout $(i,j) \in [\![1,\, n]\!]^2$, $v_{ij}(t) = O(t^p e^{\alpha t})$.
Donc, par croissance comparée, $v_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.
Donc $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |v_{ij}(t)| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, donc $\|f_A(t)\|_\infty \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.
Donc par équivalence des normes, $\|f_A(t)\|_E \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Ainsi, la réciproque de la question **19** a lieu : $\boxed{\text{si } \alpha < 0, \text{ alors } f_A(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\|\ \|_E} 0}$.

24. *On réutilise les mêmes calculs que ceux menés à la question **22**.*
Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Posons $Y = P^{-1}X$.
Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA}X = PP^{-1}e^{tA}PY = Pe^{tP^{-1}AP}Y = Pe^{tD+tN}Y = Pe^{tD}e^{tN}Y$.
Notons $\mathbb{C}_p[t]$, l'espace des fonctions polynomiales en t de degré au plus p.
Les coefficients de $t \mapsto e^{tN}Y$ sont dans $\mathbb{C}_p[t]$.
Or les coefficients de $t \mapsto e^{tD}$ sont dans $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{t\lambda}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A))$.
Donc les coefficients de $e^{tD}e^{tN}Y$ sont dans

$$\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(t \mapsto Q(t)e^{t\lambda}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ Q \in \mathbb{C}_p[t]).$$

Donc les coefficients de $Pe^{tA}X$ puis ceux de $e^{tA}X$ sont dans $\mathcal{E}$.
Or le seul élément de $\mathcal{E}$ qui soit de limite nulle est la fonction nulle.
Nous avons donc montré que :

$$e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA}X = 0.$$

Or évidemment, $(\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA}X = 0) \iff X = 0$ (dans le sens direct, il suffit d'évaluer en 0).
Donc $\boxed{e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \iff X = 0}$.

25. Les polynômes P_s, P_i et P_n ayant des ensembles de racines deux à deux d'intersection vide, ils sont deux à deux premiers entre eux.
Or $\chi_A = P_sP_iP_n$, donc par le lemme des noyaux, sachant que $\chi_A(A) = 0$, il vient :

$$\boxed{E = E_s \oplus E_i \oplus E_n}.$$

Or E_s est u-stable comme noyau d'un polynôme en u. Soit u_s l'endomorphisme induit.
Le polynôme P_s l'annule, donc $\mathrm{Sp}(u_s) \subset \{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\ ;\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$.
Alors, d'après la question **23**, pour tout $X \in E_s$, $e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.
De même, $E_i \oplus E_n$ est stable par u et l'endomorphisme induit vérifie les hypothèses de la question **24**, donc le seul vecteur X de $E_i \oplus E_n$ tel que $e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ est le vecteur nul.

Soit maintenant $X \in E$ et X_s et X_{in} ses composantes selon la décomposition $E = E_s \oplus (E_i \oplus E_n)$.
Alors $e^{tA}X = e^{tA}X_s + e^{tA}X_{in}$.
Si $e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, par différence, $e^{tA}X_{in} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, donc $X_{in} = 0$.
Réciproquement, si $X_{in} = 0$, alors $e^{tA}X = e^{tA}X_s \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.
Nous avons donc montré que :

$$\boxed{E_s = \{X \in E\ ;\ e^{tA}X \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\}}.$$

26. • Soit $X_n \in E_n$. Posons $p = n - 1$.
Les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_n$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(t \mapsto Q(t)e^{t\lambda}\ ;\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0,\ Q \in \mathbb{C}_p[t])$.
Si $Q = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, en posant $C = \sum\limits_{k=0}^{p} |a_k|$,

$$\left|\sum_{k=0}^{p} a_k t^k\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{p} |a_k|\right)(1 + |t|)^p \leqslant C(1 + |t|)^p.$$

De plus, les fonctions de $\text{Vect}(t \mapsto e^{t\lambda}\ ;\ \text{Re}(\lambda) = 0)$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Or les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_n$ appartiennent à $\text{Vect}(t \mapsto Q(t)e^{t\lambda}\ ;\ \text{Re}(\lambda) = 0,\ Q \in \mathbb{C}_p[t])$.
Donc les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_n$ sont bornées par une fonction du type $t \mapsto C(1 + |t|)^p$.
Donc :

$$\boxed{E_n \subset \{X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists p \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ \|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1 + |t|^p)\}}.$$

- Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Soit $(X_s,\, X_i,\, X_n) \in E_s \times E_i \times E_n$ tel que $X = X_s + X_i + X_n$.
  - Les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_s$ tendent vers 0 en $+\infty$,
  donc elles sont dominées par une constante sur $\mathbb{R}_+$.
  - Les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_i$ appartiennent à $\text{Vect}(t \mapsto Q(t)e^{t\lambda}\ ;\ \text{Re}(\lambda) > 0,\ Q \in \mathbb{C}_p[t])$, donc à moins d'êtres nulles, elles ont une croissance au voisinage de $+\infty$ strictement plus rapide que polynomiale.
  - Les composantes de $t \mapsto e^{tA}X_n$ sont bornées par une fonction du type $t \mapsto C(1 + |t|)^p$ sur $\mathbb{R}$.

Donc si $t \mapsto e^{tA}X$ est bornée par une fonction du type $t \mapsto D(1 + |t|)^q$ sur $\mathbb{R}_+$, la composante $t \mapsto e^{tA}X_i$ doit être nulle (il ne peut pas y avoir de compensation entre $t \mapsto e^{tA}X_i$ et $t \mapsto e^{tA}X_s + e^{tA}X_n$ pour deux raisons, chacune suffisante : la croissance de $t \mapsto e^{tA}X_s + e^{tA}X_n$ est trop faible et cette fonction est à valeur dans $E_n \oplus E_s$).
Donc $X_i = 0$.
De même, si $t \mapsto e^{tA}X$ est bornée par une fonction du type $t \mapsto D(1 + |t|)^q$ sur $\mathbb{R}_-$, alors $t \mapsto e^{tA}X_s$ est nulle, donc $X_s = 0$.
Ainsi, $X = X_n$. Nous avons montré que :

$$\boxed{E_n \supset \{X \in E \mid \ \exists C \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists p \in \mathbb{N} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ \|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1 + |t|^p)\}}.$$

Impressions générales :

- *La difficulté est très homogène. Aucune question n'est très facile ni très difficile.*
- *Toutes les questions sont classiques et beaucoup étaient déjà apparues durant les dernières années 2017 – 2021 aux oraux des Mines.*
- *L'accent est mis sur les chapitres : Espaces vectoriels normés, Fonctions vectorielles (dérivation), Réduction (surtout dans la partie 4).*
- *Le problème est très long, surtout si l'on justifie tout. Par ailleurs, les arguments sont un peu répétitifs, durant les dernières questions.*
- *Ce sujet constitue probablement un excellent sujet de révision sur les espaces vectoriels normés et les résultats classiques sur l'exponentielle de matrices.*