

CCP MP – Maths 1 – Un corrigé

Exercice I

1 – On pose, pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$: $f_k(t) = t^{2k} \ln(t)$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$:

- f_k est continue sur $]0,1[$.
- $|f_k(t)|_{t \rightarrow 0} \sim o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge absolument.

Il s'en suit que f_k est intégrable sur $]0,1[$, et donc que : L 'intégrale $\int_0^1 t^{2k} \ln(t) dt$ existe.

Sous réserve d'existence, on réalise l'intégration par parties :

$$\int_0^1 t^{2k} \ln(t) dt = \left[\frac{t^{2k+1} \ln(t)}{2k+1} \right]_0^1 - \frac{1}{2k+1} \int_0^1 t^{2k} dt$$

La partie entre crochets tend vers 0 en 0 (car $2k+1 > 0$), ce qui valide l'intégration par parties,

et on obtient : $\int_0^1 t^{2k} \ln(t) dt = -\frac{1}{2k+1} \int_0^1 t^{2k} dt$, et finalement :

$$\int_0^1 t^{2k} \ln(t) dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

2 – On note en un premier temps que f est continue sur $]0,1[$. On a en outre :

- $|f(t)|_{t \rightarrow 0} \sim -\ln(t) \sim o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, ce qui permet de conclure de la même façon que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$.
- $|f(t)|_{t \rightarrow 1} \sim \left| \frac{t-1}{(t-1)(t+1)} \right| = \frac{1}{1+t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1}{2}$. f est donc prolongeable par continuité en 1 et est ainsi intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

Il résulte de ces deux points que : f est intégrable sur $]0,1[$.

Pour $t \in]0,1[$ on a $0 \leq t^2 < 1$, donc $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ et donc $f(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. On applique alors

le théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$.
- La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement vers $-f$ sur $]0,1[$.

- On a pour $n \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 |f_n| = -\int_0^1 f_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ et la série numérique $\sum_n \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge car $0 \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et que la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est notoire.

Il résulte de tous ces points que $-\int_0^1 f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n$ et donc que $\int_0^1 f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Or pour $N \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}$; on fait alors

tendre N vers l'infini : $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 f(t) dt = \frac{\pi^2}{8}}$$

Exercice II

3 – La fonction \ln est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc : $\boxed{\ln \text{ est concave sur }]0, +\infty[}$.

Comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ on a alors pour $a, b, c > 0$ avec l'inégalité de Jensen :

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{1}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)) = \ln(\sqrt[3]{abc})$$

Et par croissance de l'exponentielle on en déduit :

$$\boxed{\forall a, b, c > 0, \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}}$$

4 – Pour $x, y > 0$ on a $xy \neq 0$ et f est ainsi clairement de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$. On a pour

$X = (x, y) \in]0, +\infty[^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 1 - \frac{1}{x^2 y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(X) = 1 - \frac{1}{xy^2}$, et ainsi :

$$\nabla f(X) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = xy^2 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Donc : $\boxed{A = (1, 1)}$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[^2$.

Comme f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[^2$ et que $]0, +\infty[^2$ est ouvert, si f admet un extremum global sur $]0, +\infty[^2$, celui-ci est un point critique. Donc le point A ci-dessus défini est l'unique extremum global possible de f . On regarde alors, pour $X = (x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$f(X) - f(A) = x + y + \frac{1}{xy} - 3$$

Or avec l'inégalité de la première question appliquée à x, y et $\frac{1}{xy}$ on a $\frac{1}{3}\left(x + y + \frac{1}{xy}\right) \geq \sqrt[3]{xy} = 1$

. Il s'en suit que $f(X) - f(A) \geq 3 - 3 = 0$, et on peut conclure :

f a un unique extremum global sur $]0, +\infty[^2$, à savoir 3 qui est atteint en $A = (1, 1)$.

Bien que ce ne soit pas demandé, on peut noter qu'il s'agit également de l'unique extremum local.

PROBLEME

Partie I – Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

5 – On propose :

```
def factorielle(n):
    "prend un entier naturel n en entrée et renvoie sa factorielle"
    p=1 #variable qui stocke le produit
    for k in range(1,n+1):
        p=p*k
    return p
```

6 – Notons tout d'abord que l'appel `factorielle(n)` déclenche n tours de boucles dans le script ci-dessus, chaque tour comportant une multiplication. Donc l'appel `factorielle(n)` provoque n multiplications. Par suite, l'appel `binom(n,p)` amène $n + p + (n - p) + 1 = 2n + 1$ multiplications. En particulier : L'exécution de `binom(30,10)` réalise 61 multiplications.

On peut améliorer l'algorithme en s'appuyant non plus sur la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ mais

plutôt sur $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$; bien que ce ne soit pas demandé, voici une proposition

de script modifié :

```
def binom2(n,p):
    "prend deux entiers n et p en entrée \
    et renvoie le coefficient binomial p parmi n"
    if not (0<=p<=n):
        return 0
    produit=1
    for k in range(p):
        produit=produit*(n-k)
    return produit//factorielle(p)
```

Pour $0 \leq p \leq n$, l'appel `binom2(n,p)` provoque clairement $2p$ multiplications. En particulier :

Le calcul de $\binom{30}{10}$ par cet algorithme modifié n'effectue que 20 multiplications.

Enfin si on change la dernière ligne comme suggéré par l'énoncé, on change le typage du résultat final :

La proposition de modification de l'énoncé renvoie un flottant en non plus un entier.

7 – On se donne $n \geq p \geq 1$. Alors $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-p+1)!}$ et donc : $\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}}$.

On utilise cette formule de récurrence avec le cas de base $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1$:

```
def binom_rec(n,p):
    "prend deux entiers n et p en entrée \
    et renvoie le coefficient binomial p parmi n"
    if not (0<=p<=n):
        return 0
    elif p==0:
        return 1
    else:
        return (n*binom_rec(n-1,p-1))/p
```

On notera que la seconde variable décroît d'une unité à chaque appel, ce qui assure que le cas de base sera atteint.

8 – On calcule un par un les nombres de Bernoulli en les stockant dans une liste B :

```
def bernoulli(n):
    "prend en entrée un entier naturel n \
    et renvoie le n-ième nombre de Bernoulli"
    B=[1] #la liste qui stocke les nombres déjà calculés
    for i in range(1,n+1):
        #calcul de b_i
        s=0
        for k in range(i):
            s+=binomial(i+1,k)*B[k]
        B.append(-s/(i+1))
    return B[n]
```

Partie II – Généralités sur la fonction zêta

9 – Soit $\alpha > 1$. On peut alors considérer un réel $c \in]1, \alpha[$. Comme $c < \alpha$ on a la domination

$0 \leq \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^c}\right)$ et comme $c > 1$ la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^c}$ converge. Il s'en suit :

Pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge.

10 – Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on a $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \exp(-x \ln(n))$. Ainsi :

- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, de somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \zeta$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$: $f_n'(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$.

- Soit $1 < a < b$ et $x \in [a, b]$. Alors $|f_n'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$ (majoration indépendante de x) et on a déjà vu que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.

Il ressort de tous ces points que :

La fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x > 1, \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$. Par suite $\forall x > 1, \zeta'(x) < 0$, et ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

11 – Si $\sum_{n \geq 1} f_n$ convergerait uniformément sur $]1, +\infty[$, comme les f_n sont en outre continues sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $n \geq 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ serait convergente (d'après le théorème de la double limite) ce qui n'arrive pas même dans les mauvais films de série Z. Donc la convergence n'est pas uniforme.

12 – En revanche on a convergence normale sur $[2, +\infty[$ car pour $x \geq 2 : |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est notoirement convergente. En outre pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \ell_n$ avec $\ell_1 = 1$ et $\ell_n = 0$ pour $n \geq 2$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n$ c'est-à-dire : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1}$.

13 – On fixe $x > 1$ et on pose pour $t \geq 1 : g(t) = \frac{1}{t^x}$. La fonction g est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ ce qui permet d'écrire pour $n \geq 2 : \int_n^{n+1} g \leq g(n) \leq \int_{n-1}^n g$ et $\int_1^2 g \leq g(1) \leq g(1)$. En sommant toutes ces relations (licite : les intégrales encadrantes et la série sont convergentes) :

$$\int_1^{+\infty} g \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g(n) \leq 1 + \int_n^{+\infty} g$$

Donc $\left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}} \right]_{t=1}^{+\infty} \leq \zeta(x) \leq 1 + \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}} \right]_{t=1}^{+\infty}$ et sachant $x > 1 : \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$, puis

$1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq x$; on conclut avec l'aide de la Gendarmerie Nationale que $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1$ et donc : $\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$.

14 – Soit $x > 1$. On note tout d'abord que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est une famille de réels positifs.

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ la série $\sum_{b \geq 1} \frac{1}{(ab)^x}$ converge, de somme $\frac{1}{a^x} \zeta(x)$ et la série $\sum_{a \geq 1} \frac{1}{a^x} \zeta(x)$ converge, de somme $\zeta^2(x)$. Il s'en suit que :

Pour $x > 1$, la famille (de réels positifs) $\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est sommable, de somme $\zeta^2(x)$.

Or on a clairement la réunion disjointe $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et donc par théorème de Fubini pour les

familles de réels positifs : $\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x}$. Or pour $(a,b) \in A_n$ on a $\frac{1}{(ab)^x} = \frac{1}{n^x}$

donc $\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \frac{1}{n^x} \text{card}(A_n)$. Soit B_n l'ensemble des diviseurs dans \mathbb{N}^* de $n \in \mathbb{N}^*$. Je

définis pour $n \geq 1$ les applications $\varphi : \begin{cases} A_n \rightarrow B_n \\ (a,b) \mapsto a \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} B_n \rightarrow A_n \\ a \mapsto \left(a, \frac{n}{a} \right) \end{cases}$ et on vérifie facilement

que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{B_n}$ et $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{A_n}$ ce qui montre leurs bijectivités et que $\text{card}(A_n) = \text{card}(B_n) = d_n$

. Donc $\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \frac{d_n}{n^x}$ et finalement $\zeta^2(x) = \sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$:

$$\forall x > 1, \zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

Partie III – Produit eulérien

Bien que ce ne soit pas demandé, vérifions qu'il est possible de définir une telle variable aléatoire : en effet pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{k^s \zeta(s)}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s \zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = 1$ ce qui assure l'existence d'une variable aléatoire X telle que définie dans l'énoncé.

15 – Pour $a \in \mathbb{N}^*$, on a la réunion disjointe $(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X = an)$, donc par σ -additivité :

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = an) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(an)^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \left(\frac{1}{a^s} \zeta(s) \right)$$

Ainsi : $\forall a \in \mathbb{N}^*, P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

16 – *Il faut ici comprendre les virgules du membre de gauche comme le connecteur logique 'et'.*

Notons d'abord que l'implication réciproque étant évidente, il nous suffit juste de montrer le sens direct. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose HR_n : 'pour tous entiers $a_1, \dots, a_n \geq 1$ premiers entre eux deux

à deux et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k \mid N$ alors $\prod_{k=1}^n a_k \mid N$ '.

- HR_1 est grossièrement vraie et HR_2 est un résultat du cours (qui peut se montrer soit avec l'identité de Bézout, soit à l'aide de la décomposition en facteurs premiers).
- Soit $n \geq 2$ tel que HR_n soit vraie. On se donne alors des entiers $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_k \mid N$. Comme a_{n+1} est premier avec a_1, a_2, \dots, a_n , il est premier avec leur produit et avec $HR_n : \prod_{k=1}^n a_k \mid N$. D'après HR_2

$$a_{n+1} \prod_{k=1}^n a_k \mid N \text{ c'est-à-dire } \prod_{k=1}^{n+1} a_k \mid N : HR_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Le résultat voulu a donc bien été établi.

En revanche : 2, 3 et 6 sont premiers entre eux dans leur ensemble et divisent tous 6, mais leur produit 36 ne divise pas 6 :

Le résultat ne se généralise pas à des nombres premiers entre eux dans leur ensemble.

17 – Soit (b_1, \dots, b_r) une sous-famille de (a_1, \dots, a_n) . Il nous faut établir que

$$P\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in b_k \mathbb{N}^*)\right) = \prod_{k=1}^r P(X \in b_k \mathbb{N}^*).$$

Comme a_1, \dots, a_n sont premiers entre eux deux à deux, il en va de même pour b_1, \dots, b_r . Donc

pour $\omega \in \Omega$ on a avec la question précédente : $(\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, b_k \mid X(\omega)) \Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^r b_k\right) \mid X(\omega)$, ce qui

revient à énoncer l'égalité entre événements (sachant $X(\omega) \in \mathbb{N}^*$) :

$$\bigcap_{k=1}^r (X \in b_k \mathbb{N}^*) = (X \in (b_1 b_2 \cdots b_r) \mathbb{N}^*)$$

Par suite avec la question 15 : $P\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in b_k \mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{(b_1 b_2 \cdots b_r)^s} = \prod_{k=1}^r \frac{1}{b_k^s} = \prod_{k=1}^r P(X \in b_k \mathbb{N}^*) :$

La famille $\left((X \in a_k \mathbb{N}^*)\right)_{1 \leq k \leq r}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants.

18 – On a : $P(B_n) = P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^n (X \in p_k \mathbb{N}^*)}\right)$. Or p_1, p_2, \dots, p_n sont premiers entre eux deux à deux,

donc la famille $\left((X \in p_k \mathbb{N}^*)\right)_{1 \leq k \leq r}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, et

il en va alors de même pour la famille $\left(\overline{(X \in p_k \mathbb{N}^*)}\right)_{1 \leq k \leq r}$. Donc $P(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - P(X \in p_k \mathbb{N}^*)\right)$

, et avec la question 15 : $P(B_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$.

19 – Soit $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Cela signifie que $X(\omega)$ est un entier ≥ 1 qui n'a pas de diviseur premier ;

ainsi $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \Leftrightarrow X(\omega) = 1$. Or $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement une suite décroissante d'évènements

donc avec le théorème de continuité décroissante : $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$

Or $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = P(X=1) = \frac{1}{\xi(s)}$; on obtient alors : $\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$.

Pour ceux qui connaissent les produits infinis, cette relation peut s'écrire : $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$.

Cette formule est attribuée à Euler.

20 – On a $u_n > 0$ pour $n \geq 1$ ce qui permet de calculer $\ln(u_n) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$. Or on a

l'équivalent $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ et la série à termes positifs $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ a été supposée

convergente. Donc la série de terme général $\left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right)_{k \geq 1}$ converge ; appelons σ sa

somme ; on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \sigma$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^\sigma$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell = e^\sigma$

Or pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$ on a $p_k \geq 2$ donc $p_k^s \geq p_k$ puis $0 < \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$, puis en multipliant

ces inégalités pour k entre 1 et n : $\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \leq u_n$ et en passant à la limite : $\zeta(s) \leq \ell$, ce qui

contredit $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$. Donc :

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ des inverses des nombres premiers est divergente.

Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration.

André Weyl (1906-1998),