

Épreuve de Mathématiques ENS U/L/C

Filière BCPST, année 2003

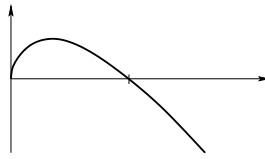
Walter APPEL

Partie A

1. D'après les théorèmes connus de croissance comparée, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

La courbe représentative est



2. Exemples de systèmes simples

2a. $H(\mu) = \ln 2$.

2b. On peut prendre un système donné par $\Omega = \{1, 2, \dots, 2^n\}$ muni de la probabilité uniforme.

2c. Si μ est une stratégie d'entropie nulle, puisque tous les $-\mu_i \ln \mu_i$ sont positifs, ils doivent tous être nuls, ce qui impose $\mu_i \in \{0, 1\}$; la somme des μ_i valant 1, on en déduit qu'il existe un indice $i_0 \in \llbracket 1; d \rrbracket$ tel que $\mu_{i_0} = 1$, et les autres μ_i sont nuls : la stratégie est une probabilité associée à un événement (presque) certain.

3. Inégalité de concavité du logarithme

3a. **Sens direct** : on suppose f convexe. Soit $z \in I$. Choisissons $x, y \in I$ tels que $x \leq z \leq y$...

Sens réciproque : on suppose que $f'' \geq 0$. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in]0; 1[$.

3b. On remarque que la dérivée seconde de la fonction logarithme est strictement négative sur $]0; +\infty[$ donc cette fonction est strictement convexe.

3c. Une récurrence simple. La propriété a été établie pour $n = 2$ à la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$ et supposons la propriété établie aux rangs $2, \dots, n$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels de $]0; 1[$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Posons $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$. Si $\Lambda = 0$ la propriété est triviale, sinon on pose

$$x = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) &= \ln \left((1 - \lambda_{n+1}) x + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &\geq \underbrace{(1 - \lambda_{n+1})}_{=\Lambda} \ln x + \lambda_{n+1} x_{n+1} \end{aligned}$$

d'après la propriété au rang 2, donc

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \right) &\geq \Lambda \ln \left(\frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &\geq \Lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

d'après la propriété au rang n , ce qui établit la propriété au rang $n + 1$.

4. **4a.** Notons $\mathcal{J} = \{i \in \llbracket 1; d \rrbracket ; \nu_i \neq 0\}$. Les indices n'appartenant pas à \mathcal{J} ne contribuent ni à $H(\nu)$ ni à la somme de droite, donc

$$\begin{aligned} H(\nu) + \sum_{i=1}^d \nu_i \ln \mu_i &= \sum_{i \in \mathcal{J}} \nu_i \ln \left(\frac{\mu_i}{\nu_i} \right) \\ &\stackrel{*}{\leq} \ln \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} \mu_i \right) \stackrel{**}{\leq} \ln \left(\sum_{i=1}^d \mu_i \right) = \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

par inégalité de concavité (*), puis croissance de la fonction logarithme (**).

- 4b.** Il faut égalité dans la relation (**) donc il faut que $\mu_i = 0$ si $i \notin \mathcal{J}$.

Il faut de plus égalité dans la relation (*) ce qui, d'après la stricte concavité du logarithme, ne peut se faire que si, pour tout $i \in \mathcal{J}$, on a $\mu_i = \alpha \nu_i$, et donc, avec $\sum_{i \in \mathcal{J}} \nu_i = \sum_{i \in \mathcal{J}} \mu_i = 1$, donne $\alpha = 1$.

Il n'y a donc égalité que si $\mu = \nu$.

- 4c.** Prenons μ la stratégie uniforme. On obtient immédiatement

$$H(\nu) \leq - \sum_{i=1}^d \nu_i \ln \frac{1}{d} = \ln d,$$

ce qui est un majorant de $H(\nu)$ (un *vrai* majorant, indépendant de ν !). Puisque $H(\mu) = \ln d$, on en déduit que la stratégie uniforme est *une* stratégie d'entropie maximale. Par ailleurs, la question précédente garantit l'unicité d'une telle stratégie d'entropie maximale.

5. Puissance d'une stratégie

La puissance de la stratégie vérifie, en utilisant les notations précédentes :

$$\begin{aligned} P(\mu, \varphi) &= \sum_{i \in \mathcal{J}} \mu_i \ln \frac{\varphi(x_i)}{\mu_i} \\ &\stackrel{*}{\leq} \ln \left(\sum_{i \in \mathcal{J}} \varphi(x_i) \right) \stackrel{**}{\leq} \ln \left(\sum_{i=1}^d \varphi(x_i) \right) = \ln Z(\varphi), \end{aligned}$$

où l'inégalité (*) vient de la concavité du logarithme et l'inégalité (**) de sa croissance.

$\ln Z(\varphi)$ est donc un majorant de la puissance de toute stratégie ; de plus, il est atteint lorsque les $\varphi(x_i)/\mu_i$ sont tous égaux, ce qui mène à l'existence et l'unicité de la stratégie maximisant la puissance, et définie par

$$\hat{\mu}_i = \frac{\varphi(x_i)}{Z(\varphi)}.$$

(Le cas où φ est la fonction nulle est à mettre à part et, essentiellement, présente peu d'intérêt : le potentiel de reproduction n'est pas défini.)

6. Variation de la fonction de gain

6a. $\hat{\mu}(\beta) = \frac{\varphi^\beta(x_i)}{Z(\varphi^\beta)}$.

- 6b.** On note $r(\beta) = \ln Z(\varphi^\beta)$. Alors

$$r'(\beta) = \frac{d}{d\beta} r(\beta) = \frac{1}{Z(\varphi^\beta)} \sum_{i=1}^d (\ln \varphi(x_i)) \varphi^\beta(x_i).$$

Cela donne notamment

$$r'(1) = \frac{1}{Z(\varphi)} \sum_{i=1}^d (\ln \varphi(x_i)) \varphi(x_i) = \sum_{i=1}^d \hat{\mu}_i \ln \varphi(x_i) = \Phi(\hat{\mu}, \varphi).$$

- 6c.** Une seconde dérivation mène, tout calculs effectués, à

$$\begin{aligned} r''(\beta) &= \sum_{i=1}^d \hat{\mu}_i(\beta) (\ln \varphi(x_i))^2 - \left(\sum_{i=1}^d \hat{\mu}_i(\beta) \ln \varphi(x_i) \right)^2 \\ &= E_\beta(\ln^2 \varphi) - E_\beta(\ln \varphi)^2 = V_\beta(\ln \varphi) \end{aligned}$$

où l'on a noté E_β et V_β l'espérance et la variance relativement à la probabilité $\hat{\mu}(\beta)$. Comme toute variance, cette quantité est positive donc r est convexe.

6d. $r''(1) = V(\ln \varphi)$.

6e. Si $\varphi(x_i) > 0$, alors tous les μ_i sont non nuls. Si la variance est nulle, on en déduit que la fonction $\ln \varphi$ est constante sur Ω ; en effet,

$$r''(1) = \sum_{i=1}^d \hat{\mu}_i \left(\ln \varphi(x_i) \sum_{k=1}^d \hat{\mu}_k \ln \varphi(x_k) \right)^2$$

donc $r''(1)$ est une somme nulle de termes positifs, donc chaque terme est nul.

La fonction φ est donc constante sur Ω , donc $\hat{\mu}$ aussi, donc l'entropie vaut $\ln d$ et est maximale.

6f. Dans la limite où β tend vers 0, on a $\varphi^\beta(x_i) \rightarrow 1$ donc $\hat{\mu}(\beta)$ tend vers la probabilité uniforme :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \hat{\mu}_i(\beta) = \frac{1}{d} \quad \text{pour tout } i \in \llbracket 1; d \rrbracket.$$

6g. Quitte à changer l'ordre des x_i , on peut supposer que les p premiers x_i maximisent le gain :

$$M = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_p) > \varphi(x_k) \quad \text{pour tout } k > p.$$

Alors

$$Z(\varphi^\beta) = M^\beta \left[p + \left(\frac{\varphi(x_{p+1})}{M} \right)^\beta + \dots + \left(\frac{\varphi(x_d)}{M} \right)^\beta \right]$$

ce qui donne

$$\hat{\mu}_1(\beta) = \dots = \hat{\mu}_p(\beta) = \frac{1}{\underbrace{p + \left(\frac{\varphi(x_{p+1})}{M} \right)^\beta}_{\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{\varphi(x_d)}{M} \right)^\beta}_{\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{p}$$

tandis que, pour tout $k \in \llbracket p+1; d \rrbracket$,

$$\hat{\mu}_k(\beta) = \underbrace{\left(\frac{\varphi(x_k)}{M} \right)^\beta}_{\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0} \frac{1}{\underbrace{p + \left(\frac{\varphi(x_{p+1})}{M} \right)^\beta}_{\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{\varphi(x_d)}{M} \right)^\beta}_{\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0.$$

En conclusion, si les p premiers éléments sont de gain maximal, alors

$$\hat{\mu}^* = \left(\underbrace{\frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}}_{p \text{ fois}}, 0, \dots, 0 \right).$$

7. Une stratégie d'entropie infinie

7a. La simple décroissance de f permet d'écrire que

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

On conclut en remarquant que la série étant *positive*, si l'intégrale est convergente alors la majoration

$$\sum_{n=3}^N f(n) \leq \int_2^{+\infty} f(t) dt$$

permet de conclure que la série converge.

La fonction étant à valeurs positives, si l'intégrale diverge, alors $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_2^N f = +\infty$ et la majoration

$$\int_2^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{n=2}^N f(n)$$

permet de montrer que la série diverge.

7b. Sur tout intervalle de $[2; +\infty[$, on a

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C^{\text{te}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C^{\text{te}}.$$

7c. On en déduit que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

7d. Pour tout $n \geq 3$ on a

$$\begin{aligned} -\mu_n \ln \mu_n &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n(\ln n)^2} \left[\ln \alpha + \ln n + 2 \ln(\ln n) \right] \\ &= \frac{\ln \alpha}{\alpha} \frac{1}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{n \ln n} + \frac{2 \ln(\ln n)}{\alpha n(\ln n)^2}. \end{aligned}$$

Le premier terme est associé à une série convergente, le second à une série divergente positive et le dernier est un terme positif.

Ainsi, $\sum \mu_n \ln \mu_n$ est une série divergente et l'entropie est infinie.

Partie B

0. Préliminaires

0a. Si $a_0 = 1$, tous les autres a_i sont nuls et $f = 1$.

0b. On suppose désormais que $a_0 < 1$. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_k > 0$, et donc $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \geq k a_k x^{k-1} > 0$ pour tout $x \in]0; 1]$, ce qui est suffisant pour montrer que f est strictement croissante.

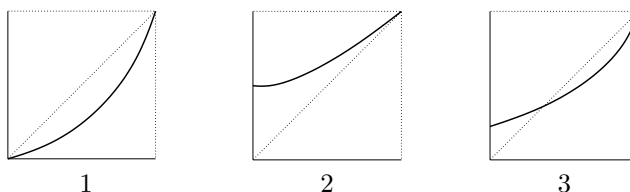
0c. Si $a_0 + a_1 = 1$, alors $f(x) = a_0 + a_1 x$: fonction affine.

0d. On suppose désormais $a_0 + a_1 < 1$, alors il existe $k \geq 2$ tel que $a_k > 0$ et on montre que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]0; 1]$, ce qui suffit à prouver que f est strictement convexe.

0e. On suppose $a_0 = 0$. La fonction f est croissante, strictement convexe et de plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$: l'équation $f(x) = x$ a pour solution $\{0, 1\}$ (voir figure 1).

On suppose $0 < a_0 < 1$ et $f'(1) < 1$. Alors $f(0) > 0$ et $f(1) = 1$, et la pente en 1 est au maximum 1 (figure 2) : l'équation n'admet sur $[0; 1]$ que l'unique solution $x = 1$ (éventuellement, si $f'(1) < 1$ et sous réserve, une autre solution dans $]1; +\infty[$).

On suppose $0 < a_0 < 1$ et $f'(1) > 1$. Alors la fonction a l'allure de la figure 3 et il existe une solution dans $]0; 1[$, plus la solution $x = 1$.



I

1. $G_X^{(k)}(0) = k! P(X = k)$

2. $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'(1) - (G'_X(1))^2$ (existent grâce au fait que l'on peut dériver en $1 \in [0; \rho]$).

3. Exemple : loi de Poisson

3a. $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, rayon ∞ .

3b. $E(X) = V(X) = \lambda$.

4. 4a. L'indépendance des v.a. X_k permet d'écrire $G_n = \prod_{k=1}^n G_{X_k} = (G_X)^n$.

4b. On utilise le fait que $P(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S = n \text{ et } N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = n \text{ et } N = k)$ donc

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S = n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = n \text{ et } N = k) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n) \cdot P(N = k) t^n = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n) t^n}_{G_k(t)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) (G_k(t))^n = G_N(G_X(t)). \end{aligned}$$

4c. $E(S) = G'_S(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1) = E(N) \cdot E(X)$. Un calcul un peu plus long donne


$$V(S) = G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2 = E^2(X)V(N) + E(N)V(X).$$


II


1. $G_{Z_0} = \text{Id}$ et $G_{Z_1} = G$.
2. Avec la question 4.b, on a $G_{Z_2} = G \circ G$.
3. $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n+1 \text{ fois}}$.
4. On a $\alpha_{n+1} = G \circ G \circ \dots \circ G(0) = G(\alpha_n)$. Or, il existe dans tous les cas de figure (voir figures 2 et 3) un intervalle $[0; \ell]$ sur lequel $G(x) \geq x$, et cet intervalle est stable par G , ce qui montre que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par ℓ , donc converge. (On pouvait noter aussi par un argument purement probabiliste que $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ puisque s'il n'y a plus de bactéries à l'instant n , il n'y en aura pas non plus à l'instant $n + 1$.)
5. On a $E(Z_{n+1}) = G'_{Z_{n+1}}(1) = G'_{Z_n}(G(1)) \cdot G'(1) = E(Z_n) \cdot E(Z)$ car $G(1) = 1$, et donc par une récurrence immédiate

$$E(Z_n) = E(Z)^n.$$

6. 6a. Il faut distinguer deux cas.

Si $E(Z) < 1$: la courbe est du style  ce qui montre que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$: extinction sûre, et $E(Z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Si $E(Z) = 1$ et $p_0 > 0$: la courbe est encore du style  ce qui montre que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$: extinction encore sûre, et bien sûr $E(Z_k) = 1$.

6b. On suppose maintenant $E(Z_1) > 1$. La courbe de G est du style  ce qui montre que $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell \in]0; 1]$: l'extinction n'est pas sûre (sa limite est > 0 car la population peut très bien disparaître au cours des premières générations).

De plus $E(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$: la population est explosive.

Partie C

On travaille dans des unités de population où la population initiale est 1 (sinon, tout multiplier par une constante sans intérêt).

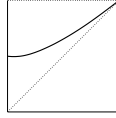
1. $\hat{\mu}_k = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, et le nombre de descendants moyen est λ (espérance d'une v.a. de Poisson).
2. On suppose que la population mutante est correctement décrite par la stratégie $\hat{\mu}^*$, obtenue dans la limite $\beta \rightarrow \infty$.

2a. On suppose $0 < \lambda < 1$.

Population sauvage : la stratégie $\hat{\mu}$ est la distribution de Poisson

$$\hat{\mu} = e^{-\lambda} \left(1, \lambda, \frac{\lambda^2}{2!}, \dots, \frac{\lambda^k}{k!}, \dots \right)$$

donc $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G'(1) = \lambda < 1$. On est donc dans le cas où la courbe est du style



et d'après les résultats de la partie B.II, on a $E(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

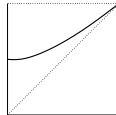
Population mutante : la stratégie $\hat{\mu}^*$ est obtenue comme indiqué dans la question A.6.g :

$$\hat{\mu}^* = (1, 0, \dots, 0, \dots).$$

Alors $G'(1) = 0$ donc $E(Z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et de plus $\alpha_n^* = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La population sauvage a entièrement disparu au bout d'une génération.

2b. On suppose $\lambda = 1$.

Population sauvage : $G(t) = e^{t-1}$ et $G'(1) = \lambda = 1$. On est donc dans le cas où la courbe est encore du style

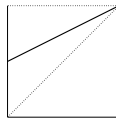


et d'après les résultats de la partie B.II, on a $E(Z_n) = 1$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. L'extinction (au bout d'un temps infini) est (presque) certaine, mais la population moyenne est stable (un individu).

Population mutante : la stratégie $\hat{\mu}^*$ est maintenant

$$\hat{\mu}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

donc $G'(1) = \frac{1}{2} < 1$, le graphe est



et conduit à la conclusion : $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $E(Z_n) = \frac{1}{2^n}$. L'extinction est certaine et la population décroît rapidement.

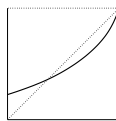
2c. On suppose $\lambda > 1$.

Cas $\lambda = k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Population sauvage : la stratégie $\hat{\mu}$ est la distribution de Poisson

$$\hat{\mu} = e^{-\lambda} \left(1, \lambda, \frac{\lambda^2}{2!}, \dots, \frac{\lambda^k}{k!}, \dots \right)$$

donc $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $G'(1) = \lambda > 1$. On est donc dans le cas où la courbe est du style

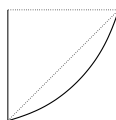


et d'après les résultats de la partie B.II, on a $E(Z_n) = \lambda^n = k^n$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ (solution de $G(x) = x$ autre que 1). L'extinction est donc douteuse : elle a peut-être lieu (notamment au début...) ou peut-être pas, mais la population est en moyenne à croissance rapide (exponentielle).

Population mutante : la stratégie $\hat{\mu}^*$ est obtenue en se souvenant (ou en recalculant!) qu'une distribution de Poisson de paramètre entier $k \in \mathbb{N}^*$ a son maximum en k et en $k-1$:

$$\hat{\mu}^* = \left(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k-1}}{\frac{1}{2}}, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{\frac{1}{2}}, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

donc $G(x) = \frac{1}{2}(x^{k-1} + x^k)$ et $G'(1) = k - \frac{1}{2} > 1$. La courbe est



et on y lit que $\alpha_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'extinction est impossible (normal, chaque individu fait $k - 1$ ou k rejets, mais jamais 0). En revanche, la croissance est (légèrement) moins rapide que celle de la population sauvage, puisqu'elle croît en $E(Z_n) = (k - \frac{1}{2})^n$.

$$\text{Cas } \lambda \in [k; k + 1[$$

Population sauvage : pas de changement.

Population mutante : Les calculs sont identiques, mais le maximum de la loi de Poisson est en k :

$$\mu^* = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0, \dots),$$

donc $\alpha_n^* = 0$: extinction exclue. De plus, la croissance est légèrement plus lente que celle de la population sauvage puisque $E(Z_n^*) = (k)^n \ll E(Z_n) = \lambda^n$.

2d. La population mutante croît un peu plus lentement que la population sauvage dans le cas $\lambda > 1$ mais a évité le risque d'extinction (plus ou moins important dans les premiers temps).

On note quand même que la distinction λ entier ou non semble bien artificielle...

Partie D

1. $M/n = 1$ indique un même choix "+1" pour tous les individus ; $M/n = 0$: équirépartition des choix...
2. À l'équilibre démographique quand $\beta = 0$, la fonction de gain est constante donc la probabilité est uniforme ; on en déduit que $M = 0$.
- 3.

$$Z = \sum_{i \in \Omega} \varphi(x_i) = \sum_{i \in \Omega} e^{-\beta[n\mathcal{E}_0 - n\Delta\mathcal{E} + 2n_i\Delta\mathcal{E}]}$$

où l'on a noté n_i le nombre de "-1" dans l'événement x_i , ce qui fait que $S(x_i) = n - 2n_i$. Un peu de dénombrement maintenant : il y a C_n^k événements qui ont k "-1" sur les n , donc

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-\beta[n\mathcal{E} - n\Delta\mathcal{E} + 2k\Delta\mathcal{E}]} \\ &= e^{-n\beta\mathcal{E}^-} \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{-2\beta\Delta\mathcal{E}})^k = e^{-n\beta\mathcal{E}^-} [1 + e^{-2\beta\Delta\mathcal{E}}]^n \\ &= [e^{-\beta\mathcal{E}^-} + e^{-\beta\mathcal{E}^+}]^n. \end{aligned}$$

4. **4a.** On a

$$\hat{\mu}(x_i) = \frac{1}{Z} \exp \{-\beta[\mathcal{E}_0 - \Delta\mathcal{E} S(x_i)]\}$$

et

$$P(\hat{\mu}, \varphi) = n \ln [e^{-\beta\mathcal{E}^-} + e^{-\beta\mathcal{E}^+}]$$

4b. M est la valeur moyenne de la quantité S qui se calcule donc avec les $\hat{\mu}_i$; ceux-ci dépendent bien de toutes les données du problème : α , β , λ et n . On a donc un système d'équations fermé qui est *a priori* très difficile à résoudre.

4c. On peut développer

$$P(\hat{\mu}, \varphi) = -\beta \frac{\lambda M^2}{2n} + n \ln 2 + n \ln \left(\text{ch } \beta \left(\frac{\lambda M}{n} + \alpha \right) \right).$$

En dérivant par rapport à M , on obtient

$$0 = \frac{\partial P}{\partial M} = -\frac{\beta\lambda M}{n} + \beta\lambda \text{ th} \left(\frac{\beta\lambda}{n} M + \alpha \right),$$

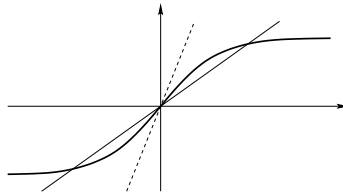
soit

$$\frac{M}{n} = \text{th} \left(\beta\lambda \frac{M}{n} + \alpha \right) \quad (*)$$

5. L'équation devient

$$\frac{M}{n} = \text{th} \left(\beta\lambda \frac{M}{n} + \alpha \right)$$

- 5a. On trace, en fonction de $x = \frac{\beta\lambda M}{n}$, les courbes des fonctions $x \mapsto \text{th}(x)$ et $x \mapsto \frac{x}{\beta\lambda}$: selon la pente, on a les cas suivants :



ce qui mène à une ou trois solutions.

- 5b. On constate que $\begin{cases} \beta\lambda \leq 1 : & x = 0 \\ \beta\lambda > 1 : & 3 \text{ solutions} \end{cases}$

On pose donc $\beta_c = 1/\lambda$. Si $\beta \leq \beta_c$ alors l'unique solutions est $M = 0$, ce qui traduit le fait qu'il y a la moitié de la population qui fait le choix "+1" et la moitié qui fait le choix "-1" (équirépartition). On a préservé la symétrie du problème (symétrie des causes, symétries des effets).

- 5c. Si $\beta > \beta_c$, on a *a priori* trois solutions : $M = 0$ ainsi qu'une solution strictement positive M et une solution strictement négative $-M$. Mais la solution $M = 0$ ne convient pas, car elle mène à une puissance $P = n \ln 2$ (de nature purement entropique) qui est inférieure à la puissance obtenue en M (ou en $-M$)

$$P = n \ln -\frac{\beta\lambda M^2}{2n} + n \ln \text{ch} \frac{\beta\lambda M}{n}$$

(en effet, $\partial P / \partial M$ est négatif sur $[0; M]$ comme on voit sur le graphe).

- 5d. À β petit, l'entropie joue davantage et on a équirépartition. Si β devient grand, la symétrie se brise : il suffit qu'à un moment une fluctuation entraîne une prédominance de "+" et soudain tout le monde voudra faire pareil : tendance des moutons de Panurge (ou à suivre la mode, c'est pareil).
- 5e. Le traitement de M est pour le moins cavalier et difficile à justifier. Cependant, dans d'autres domaines, cette méthode donne de bons résultats (thermodynamique statistique : problème du ferromagnétisme).
6. Faire des dessins.