

I) Equations différentielles

A) $xy' - y = \ln(x)$

- 1) a) L'équation différentielle est linéaire, du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On travaille sur \mathbb{R}_+^* , intervalle sur lequel le théorème s'applique, on connaît donc l'existence de solutions et leur structure.

L'équation homogène associée est : $xy' - y = 0$, ses solutions sont : $y = Ke^{-\int \frac{1}{x} dx} = Kx$.

- b) On cherche ici une solution particulière, à moins d'en « deviner » une, on applique la méthode de variation de la constante. $y = kx$ donne $y' = K + K'x$, et donc $xy' - y = K'x^2 = \ln(x)$.

On cherche donc une primitive à $K' = \frac{\ln(x)}{x^2}$,

on obtient facilement en intégrant par parties :

$$K = \int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right] + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}.$$

On obtient alors comme solution particulière : $y = -\ln(x) - 1$.

- c) Les solutions de l'équation sont donc : $y = Kx - \ln(x) - 1$.

- 2) Avec la condition initiale $y(0) = 1$, on obtient $K = 1$ et donc : $f(x) = x - \ln(x) - 1$.

B) $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$

- 1) L'équation différentielle est linéaire, du second ordre à coefficients non constants avec second membre. On travaille sur \mathbb{R}_+^* , intervalle sur lequel le théorème s'applique, on connaît donc l'existence de solutions et leur structure.

L'équation homogène associée est : $x^2y'' - xy' + y = 0$

- a) On cherche une solution de l'équation homogène sous la forme $y = x^\alpha$. Ce qui donne $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. On remarque que, comme on travaille sur \mathbb{R}_+^* , ces formules sont encore valables si α vaut 0 ou 1.

On réinjecte dans l'équation : $x^2y'' - xy' + y = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)x^\alpha = 0$, d'où $\alpha = 1$.

La vérification est élémentaire et, $x \mapsto x$ est donc solution de l'équation différentielle homogène associée.

- b) On utilise encore la variation de la constante : $y = Kx$, $y' = K + K'x$ et $y'' = 2K' + K''x$.

On réinjecte dans l'équation : $x^2y'' - xy' + y = K''x^3 + K'x^2 = 0$.

Comme on travaille sur \mathbb{R}_+^* , on obtient : $K''x + K' = 0$.

C'est bien une équation différentielle linéaire du premier ordre en K' , sans second membre.

On obtient facilement une solution particulière $K' = \frac{1}{x}$ et donc $K = \ln(x)$.

Finalement, $x \mapsto x \ln(x)$ est une autre solution de l'équation différentielle homogène associée.

- c) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre sur un intervalle convenable a une structure d'espace vectoriel de dimension 2.

La solution générale de $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur \mathbb{R}_+^* est donc : $x \rightarrow \lambda x + \mu x \ln(x)$.

- 2) a) On pose $y_0 = -1 - \ln(x)$, d'où $y_0' = -\frac{1}{x}$ et $y_0'' = \frac{1}{x^2}$. $x^2y_0'' - xy_0' + y_0 = 1 + 1 - 1 - \ln(x) = 1 - \ln(x)$. y_0 est bien une solution particulière de (E_2) .

- b) L'ensemble des solutions de cette équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* est donc :

$x \mapsto -1 - \ln(x) + \lambda x + \mu x \ln(x)$.

- 3) On sait qu'avec ces conditions initiales, (E_2) possède une solution unique.

On a $f(x) = x - \ln(x) - 1$ qui correspond à $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, c'est une solution de (E_2) .

On a aussi $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$; f est donc l'unique solution de (E_2) qui vérifie ces conditions initiales.

II) Etude de la fonction f

1) $f(x) = x - 1 - \ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ est du signe de $x - 1$.

La limite de f en 0^+ est $+\infty$, ainsi que celle en $+\infty$ en utilisant cette fois le théorème des croissances comparées.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

b) En 0^+ , on a une asymptote verticale.

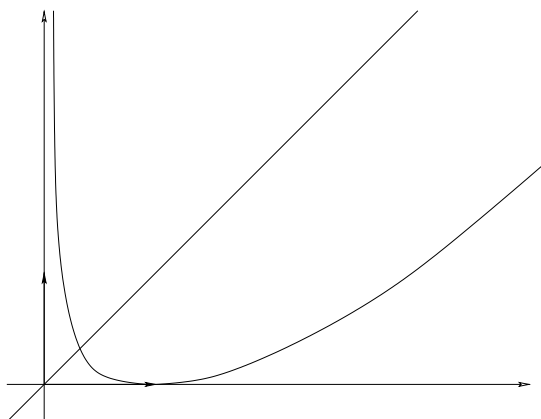
En $+\infty$, on cherche la limite de : $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

On a au moins une branche infinie de direction asymptotique $y = x$.

On cherche maintenant la limite de : $f(x) - x = -1 - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

On a finalement une branche parabolique de direction asymptotique $y = x$.

Voici l'allure du graphe.



c) On a bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$, et donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - 1 \geq \ln(x)$.

2) a) $x \ln(x) - x$ est connue *par cœur* comme étant une primitive de $\ln(x)$, et donc

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} - x - (x \ln(x) - x) = \frac{x^2}{2} - x \ln(x) \text{ est une primitive de } f.$$

b) On a ici une intégrale impropre avec une singularité en 0. Mais $\frac{x^2}{2} - x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, les primitives de f ont donc une limite finie en 0, l'intégrale de f converge donc en 0.

En appelant F la primitive de f calculée :
$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{1}{2}.$$

c) On a maintenant une intégrale généralisée avec une singularité en $+\infty$, mais, ici, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui prouve que cette intégrale diverge.

III) Comparaison des moyennes

1) a) On a montré que, pour des nombres positifs, $\ln(x) \leq x - 1$, les $\frac{a_i}{m_a}$ sont ici positifs,

ce qui prouve que :
$$\ln \frac{a_i}{m_a} \leq \frac{a_i}{m_a} - 1,$$

et en sommant ces inégalités, on obtient :
$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{a_i}{m_a} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{m_a} - n,$$

ou encore :
$$\ln \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) - n \ln(m_a) \leq \frac{\sum_{i=1}^n (a_i) - nm_a}{m_a} = 0.$$

Ce qui donne : $\ln(m_g^n) \leq n \ln(m_a)$, puis, en divisant par n , $\ln(m_g) \leq \ln(m_a)$.

Et comme le logarithme est croissant, $m_g \leq m_a$.

- b)** Pour avoir une égalité, il faut que, dans toutes les inégalités utilisées, on ait en fait une égalité ; c'est à dire que tous les $\frac{a_i}{m_a}$ valent 1.

On a donc : $m_g = m_a \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- c)** L'inégalité proposée est ici grossièrement fautive, il faut remplacer $x^2 y^2 z^2$ par $x^2 y^2 z^2$.

L'inégalité à montrer est en fait : $x^2 y^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2 - 4) + 1 \geq 0$.

On appelle $x^2 = a_1$, $y^2 = a_2$, $z^2 = a_3$ ainsi que m_g et m_a les moyennes géométriques et arithmétiques de ces trois nombres.

L'inégalité à montrer devient : $m_g^3 (3m_a - 4) + 1 \geq 0$.

Il n'y a pas de problème quand $3m_a - 4 \geq 0$.

Quand $3m_a - 4 \leq 0$, la valeur minimale de $m_g^3 (3m_a - 4) + 1$ sera obtenue pour la valeur maximale de m_g , c'est à dire pour $m_g = m_a$.

Cette valeur est : $m_a^3 (3m_a - 4) + 1$.

Il suffit donc d'étudier le signe de $x^3 (3x - 4) + 1$ sur $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

On pose $h(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$, on calcule $h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$

x	0	1	4/3
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\searrow	0	\nearrow

qui nous donne les variations de h :

$h(x)$ est bien positif sur $\left[0, \frac{4}{3}\right]$, l'inégalité demandée est démontrée.

- 2) a)** En appliquant l'inégalité précédente aux $\frac{1}{a_i}$, on obtient :
$$\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}{n}.$$

On passe aux inverses, ce qui donne :
$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

C'est à dire : $m_h \leq m_g$.

- b)** On a $m_h = m_g$ quand on a l'égalité à la question 1)b),

c'est à dire si et seulement si $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- c)** $m_h \leq m_g \leq m_a \Rightarrow m_h \leq m_a$.

Ce qui donne :
$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n},$$
 qu'il suffit de réécrire :
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

IV) Applications

- 1) On écrit $m_g \leq m_a$ avec les nombres $a_i = i$, ce qui donne : $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

On a bien : $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

- 2) a) Pour $x \in [k-1, k]$, on a : $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$, ce qui entraîne : $\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{k}$.

Ceci n'a de sens que si l'intégrale considérée existe, c'est à dire si $k \geq 2$.

- b) On obtient donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx$,
en appliquant simplement l'inégalité précédente et la relation de Chasles.

- c) L'inégalité précédente nous donne : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

En passant aux inverses et en multipliant par n , on obtient : $\frac{n}{1 + \ln(n)} \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.

Cette dernière quantité est la moyenne harmonique en prenant $a_k = k$, qui est donc plus petite que la moyenne géométrique correspondante.

Ce qui donne : $m_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \leq m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k} = \sqrt[n]{n!}$

On a bien : $\frac{n}{1 + \ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$

- 3) a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + \ln(n)} = +\infty$, en utilisant les croissances comparées, et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

- b) Les questions 1) et 2)c) nous donnent un encadrement de $\sqrt[n]{n!}$, diviser cet encadrement par n

donne : $\frac{1}{1 + \ln(n)} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{n+1}{2n}$.

Ce qui donne : $0 \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq 1$, la suite est bien bornée.

- 4) a) On pose $u_n = \ln(\sqrt[n]{n!}) = \frac{1}{n} \ln(n!)$, on a donc $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \ln((n+1)!)$,

et on calcule $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \ln(n!) - \frac{1}{n} \ln(n!) = \frac{n \ln(n+1) - \ln(n!)}{n(n+1)}$

On en déduit : $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln \frac{(n+1)^n}{n!}}{n(n+1)} \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante et il en est de même de la suite $(\sqrt[n]{n!})$.

- b) La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ est donc alternée répondant au critère spécial car la valeur absolue du terme général décroît — vu au 4)a) — et tend vers 0 — vu au 3)a) —.

V) Un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$

- 1) a) On a pour $k \geq 2$, $\int_{k-1}^k \ln(x) dx \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(x) dx$.

b) On somme ces inégalités de $k = 2$ à n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx &= \int_1^n \ln(x) dx \\ &\leq \sum_{k=2}^n \ln(k) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n!) \\ &\leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln(x) dx = \int_2^{n+1} \ln(x) dx \leq \int_1^{n+1} \ln(x) dx \end{aligned}$$

c) On utilise maintenant la primitive usuelle du \ln :

$$n \ln(n) - n \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1)$$

$$\text{On divise par } n : \ln(n) - 1 \leq \frac{\ln(n!)}{n} = \ln \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{n} \ln(n+1) - \frac{n+1}{n}$$

$$\text{On en prend l'exponentielle : } \frac{n}{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{e^{1+\frac{1}{n}}}$$

Par ailleurs, à l'infini pour n , $(n+1)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, $e^{1+\frac{1}{n}} \rightarrow e$ et $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$.

$$\text{Tout ceci implique que : } \frac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}{e^{1+\frac{1}{n}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

$$\text{Enfin : } \sqrt[n]{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}.$$

2) $\sum \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ est une série positive de terme général équivalent à $\frac{e}{n}$, donc divergente.

Et, $\sum \frac{1}{(n!)^{\frac{2}{n}}} = \sum \frac{1}{(\sqrt[n]{n!})^2}$ est une série positive de terme général équivalent à $\frac{e^2}{n^2}$, convergente.