

X-ESPCI 2002- filière PC- deuxième composition.

Première partie

Notations: $\mathcal{C} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\text{diag}(A) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ la diagonale de A .

1.

a) Raisonnement par l'absurde: on suppose que tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A .

En particulier: $\forall i \in [1..n] \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \quad Ae_i = \lambda_i e_i$. En écrivant que $X = e_i + e_j$ est aussi vecteur propre, on obtient: $AX = \mu X$ soit $\mu(e_i + e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Pour tous les i, j tels que $i \neq j$, on déduit $\mu = \lambda_i = \lambda_j$ car (e_i, e_j) est libre. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ qui prouve que A est scalaire.

b) Si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A , c'est-à-dire tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ alors la matrice B est $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ où $\mathcal{C}' = (e'_k)_k$ se déduit de $\mathcal{C}$ par l'échange de e_i et e_j c'est-à-dire

$$e'_i = e_j \quad ; e'_j = e_i \quad ; e'_k = e_k \quad \text{si } k \notin \{i, j\}.$$

Deuxième partie

2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 0$.

a) Si $A \neq 0$, A ne peut être scalaire (car $\text{tr}(\lambda I) = n\lambda = 0 \implies \lambda = 0$). D'après 1.a), il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que X_1 et $X_2 = AX_1$ sont linéairement indépendants. On complète ensuite la famille libre (X_1, X_2) en une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On considère: $\mathcal{P}(n)$: "toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 0$ est semblable à une matrice de diagonale nulle". $\mathcal{P}(1)$ étant évidente, on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie pour un entier $n \geq 2$ et on démontre $\mathcal{P}(n)$.

Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. On suppose $A \neq 0$ (pour $A = 0$, le résultat est immédiat) et on considère $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ tel que $AX_1 = X_2$. Alors

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}), L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}). \text{ Les matrices semblables } A \text{ et } A' \text{ ont}$$

même trace, à savoir: $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(A') = \text{tr}(A_1)$.

On applique ensuite $\mathcal{P}(n-1)$ à la matrice A_1 : il existe $P \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_1P = B_1$ où $\text{diag}(B_1) = (0, 0, \dots, 0)_{n-1}$.

La matrice à blocs diagonaux $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ est inversible et $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$.

Par produit des blocs, on vérifie que $Q^{-1}A'Q = B$ s'écrit $B = \begin{bmatrix} 0 & L_2 \\ C_2 & B_1 \end{bmatrix}$ où $L_2 = L_1P$ et $C_2 = P^{-1}C_1$.

La matrice B étant à diagonale nulle, $\mathcal{P}(n)$ est démontrée.

3.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de trace nulle. $\begin{cases} u(e_1) = e_1 \\ u(e_2) = -e_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \end{cases}$ vérifient

$$B = \text{Mat}_{(e'_1, e'_2)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De même, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ conduit à $B = \text{Mat}_{(e'_1, e'_2, e'_3)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_3 \\ e'_2 = e_2 \\ e'_3 = e_1 - e_3 \end{cases}$

4. Soit A non scalaire et $\boxed{t = \text{tr}(A)}$.

La matrice $A_0 = A - tI$ n'est pas scalaire et, comme en **2.a**), il existe une base $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $A_0 X_1 = X_2$ ce qui prouve que A_0 est semblable à $A'_0 = \text{Mat}_{\mathcal{X}}(u - tId) = \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix}$ où

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}), L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

En conséquence, A est semblable à $A'_0 + tI = \begin{bmatrix} t & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix}$ où $B_1 = A_1 + tI_{n-1}$ et $t = \text{tr}(A) = \text{tr}(A'_0 + tI) = t + \text{tr}(B_1)$ livre $\boxed{\text{tr}(B_1) = 0}$. On applique ensuite la question **2** à la matrice B_1 de trace nulle: ainsi, B_1 est semblable à une matrice $B_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\text{diag}(B_2) = (0, 0, \dots, 0)_{n-1}$. Il en résulte que A est semblable à une matrice de la forme $B = \begin{bmatrix} t & L_2 \\ C_2 & B_2 \end{bmatrix}$ dont la diagonale est $(t, 0, \dots, 0)_n$ où $\boxed{t = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}}$.

5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

- 1^{ère} cas : $t = \text{tr}(A) \neq 0$. La matrice $A' = A - \frac{t}{n}I$ étant de trace nulle, on la sait (d'après **2.**) semblable à une matrice $B' \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{diag}(B') = (0, 0, \dots, 0)$ et, par suite, A est semblable à $B = B' + \frac{t}{n}I$ dont la diagonale est $\left(\frac{t}{n}, \frac{t}{n}, \dots, \frac{t}{n}\right)$.
- 2^{ème} cas : $t = \text{tr}(A) = 0$.

Dans ce cas, on démontre que A est semblable à une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ de la forme:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & L_1 \\ C_1 & B_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \neq 0, L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}), C_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } B_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Pour cela, on considère un vecteur $X_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX_1 \neq 0$ (X_1 existe car $A \neq 0$).

* soit (X_1, AX_1) est liée : on peut écrire $AX_1 = \alpha X_1$ où $\alpha \neq 0$ puisque ces deux vecteurs sont non nuls.

On complète alors en $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{X}}(u)$ est de la forme désirée avec $C_1 = 0_{1,n-1}$.

* soit (X_1, AX_1) est libre : en considérant $X_2 = X_1 - AX_1$, on obtient une famille libre (X_1, X_2) que l'on complète en $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. Comme $AX_1 = X_1 - X_2$, la matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{X}}(u)$ est de la

forme voulue avec $\alpha = 1$ et $C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on remarque que $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(B) = \alpha + \text{tr}(B_1)$ donc $\boxed{\text{tr}(B_1) = -\alpha \neq 0}$ et on applique la méthode du 1^{ère} cas à la matrice B_1 : ainsi, B_1 est semblable à une matrice B'_1 dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. Par la méthode employée au **2.b**), on déduit que B (donc A) est semblable à une matrice B' de la forme requise:

$$B' = \begin{bmatrix} \alpha & L'_1 \\ C'_1 & B'_1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha \neq 0, L'_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}), C'_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}) \text{ et } B'_1 \text{ d'éléments diagonaux non nuls.}$$

Troisième partie

6. $n = 2$. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ de trace $t = a + d$. On désigne par $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (orthonormée) et on cherche une base orthonormée $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2)$ telle que $\boxed{u(e'_1) \cdot e'_1 = 0}$. Il suffit d'effectuer une rotation d'axes $\begin{cases} e'_1 = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \\ e'_2 = -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2 \end{cases}$ et de choisir θ réel tel que $u(e'_1) \cdot e'_1 = 0$.

Pour cela, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction **continue**

$$h : \theta \longrightarrow u(X_\theta) \cdot X_\theta \text{ où } X_\theta = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$$

Comme $h(0) = u(e_1) \cdot e_1 = a$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = u(e_2) \cdot e_2 = d$, il existe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(\theta_0) = \frac{a+d}{2} = \frac{t}{2}$.

La base $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2)$ correspondante vérifie:

$$B' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{bmatrix} t/2 & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \text{ avec } t = \text{tr}(B') = \text{tr}(A) = \frac{t}{2} + d' \text{ donc } d' = \frac{t}{2} \text{ qui livre le résultat.}$$

7.

- a) $f(A)$ est la borne sup d'un ensemble fini donc un maximum: il existe deux entiers i, j nécessairement distincts tels que $f(A) = |a_{ii} - a_{jj}| > 0$. En échangeant e_i et e_1 , e_j et e_2 , on obtient une base orthonormée $\mathcal{C}' = (e'_k)_k$ telle que $A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(u)$ vérifie $f(A') = f(A) = |a'_{11} - a'_{22}|$.

Comme A' est orthosemblable à A , on peut démontrer la propriété cherchée sur A' au lieu de A , ce qui revient à supposer que $f(A) = |a_{11} - a_{22}| > 0$.

REM: en choisissant i et j tels que $a_{ii} = \max\{a_{kk}, k = 1..n\}$ et $a_{jj} = \min\{a_{kk}, k = 1..n\}$, on peut se ramener au cas où $a_{22} = \max\{a_{kk}, k = 1..n\}$ et $a_{11} = \min\{a_{kk}, k = 1..n\}$ et on a, dans ces conditions,

$$f(A) = a_{22} - a_{11} \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1..n\} \quad a_{kk} \in [a_{11}, a_{22}]$$

- b) La question 6. montre que la matrice extraite $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ est orthosemblable à une matrice

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda & b_{12} \\ b_{21} & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \boxed{\lambda = \frac{\text{tr}(A_1)}{2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}}. \text{ Ceci assure l'existence d'une base orthonormée } \mathcal{C}' = (e'_1, e'_2)$$

du plan $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(u_1) = B_1$ où $u_1 = p_1 \circ u \in \mathcal{L}(P)$ (p_1 désignant la projection orthogonale sur la plan P).

On considère $\mathcal{C}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ définie par e'_1, e'_2 et $e'_i = e_i$ si $i \geq 3$. On a

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(u) = \begin{bmatrix} B_1 & L_1 \\ C_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{où } L_1 \in M_{2, n-2}(\mathbb{R}), C_1 \in M_{n-2, 2}(\mathbb{R}) \text{ et } A_2 \in M_{n-2}(\mathbb{R}).$$

On constate que les éléments diagonaux de A_2 sont les $a_{ii} = u(e'_i) \cdot e'_i = u(e_i) \cdot e_i = a_{ii}$ où $i = 3..n$. Donc

$$A' \text{ est orthosemblable à } A \text{ et vérifie } \boxed{a'_{11} = a'_{22} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \text{ et } a'_{ii} = a_{ii} \text{ si } i \geq 3.}$$

Par ailleurs, avec $a_{22} = \max\{a_{kk}, k = 1..n\}$ et $a_{11} = \min\{a_{kk}, k = 1..n\}$ (cf REM du 7.a) on a pour

$$\text{tout } i \geq 3, \quad a_{ii} \in [a_{11}, a_{22}] \text{ et par conséquent } \boxed{\forall i \geq 3 \quad \left| a_{ii} - \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right| \leq \frac{f(A)}{2} < f(A).}$$

- c) La matrice A' de la question 7.b) est telle que: $f(A') = \max_{1 \leq i < j \leq n} |a'_{ii} - a'_{jj}| = \max_{3 \leq i < j \leq n} |a_{ii} - a_{jj}| \leq f(A)$.

- Si $f(A') < f(A)$ alors la matrice $A'' = A'$ convient.
- Si $f(A') = f(A) > 0$ (donc $n \geq 4$) on réitère la construction de la question 7b) sur la matrice $A_2 \in M_{n-2}(\mathbb{R})$ extraite de A (cf notations de 7b)). On construit une matrice A'_2 orthosemblable à A_2 puis une matrice $A'' = \begin{bmatrix} B_1 & L'_1 \\ C'_1 & A'_2 \end{bmatrix}$ orthosemblable à A telle que $f(A'') = \max_{5 \leq i < j \leq n} |a_{ii} - a_{jj}| \leq f(A)$.
($f(A'') = 0$ si $n = 4$)

L'algorithme s'arrêtant au bout d'un nombre fini p d'étapes (au plus $E(n/2)$) on est sûr de trouver une matrice $A^{(p)}$ orthosemblable à A telle que $f(A^{(p)}) < f(A)$.

8.

- a) Considérons l'application $\varphi_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ Q \longrightarrow {}^tQAQ \end{cases}$ continue (par continuité d'une application bilinéaire en dimension finie) et $E_A = \{Q^{-1}AQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\} = \{{}^tQAQ/Q \in O_n(\mathbb{R})\} = \varphi_A(O_n(\mathbb{R}))$.
 Or l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est compact en tant que fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie:
 - **fermé** car $O_n(\mathbb{R}) = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tQQ = I\} = \varphi_I^{-1}(I)$ image réciproque par une application continue d'un fermé.
 - **borné** car $\forall Q \in O_n(\mathbb{R}) \quad \|Q\|_\infty = \max_{i,j} |q_{ij}| \leq 1$ (les vecteurs colonnes sont de norme quadratique 1)
 En conclusion, $E_A = \varphi_A(O_n(\mathbb{R}))$ est compact car image continue d'un compact.

- b) L'application f est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ car composée, différence d'applications continues:
 - les projections $p_i : M \longrightarrow m_{ii}$ sont continues (linéaires en dimension finie),
 - la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$,
 - l'application $\max : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \longrightarrow \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ est continue sur $\mathbb{R}^p$ ce qui s'explique par récurrence sur p en remarquant que

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right| \quad \text{et} \quad \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \max(\max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}), \alpha_p).$$

Il en résulte que f est bornée sur le compact E_A et atteint ses bornes.

REM: écrire que l'application f_{E_A} atteint son minimum est un pléonasme!

- c) On désigne par A_0 l'une des matrices de E_A telle que $f(A_0) = \min_{A' \in E_A} f(A')$. Si les coefficients diagonaux de A_0 ne sont pas tous égaux, on peut appliquer à A_0 l'algorithme de la question 7 et construire une matrice A_0'' orthosemblable à A_0 (donc orthosemblable à A) telle que $f(A_0'') < f(A_0) \leq f(A)$. C'est contradictoire avec la définition de A_0 .

Conclusion: $B = A_0$ est orthosemblable à A et à éléments diagonaux tous égaux.

9. Application numérique: l'algorithme de la question 7. conduit à:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour par exemple: } \begin{cases} e'_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2} \\ e'_2 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2} \end{cases}$$

puis en opérant sur la matrice extraite: $A'_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on obtient la matrice orthosemblable à A'_1 :

$$A''_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & ? & ? \\ ? & 1/4 & 1/4 \\ ? & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

On réitère le procédé sur A_2 qui vérifie $f(A_2) = \frac{1}{4} = |a_{11} - a_{22}|$ d'où $a'_{11} = a'_{22} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{3}{8}$ et $a'_{33} = \frac{1}{4}$.

m	$\text{diag}(A_m)$	$f(A_m)$
0	(1, 0, 0)	1
1	(1, 1, 0)/2	1/2
2	(2, 1, 1)/4	1/4
3	(3, 3, 2)/8	1/8
4	(6, 5, 5)/16	1/16

Il semble que $f(A_m) = \frac{1}{2^m}$ et que, **pour m pair**, $\text{diag}(A_m) = \frac{1}{2^m}(\alpha_m, \beta_m, \beta_m)$

avec $\alpha_m = \beta_m + 1$ et, par conservation de la trace, $\alpha_m + 2\beta_m = 2^m$. On trouve ainsi que

$$\alpha_m = \frac{2^m + 2}{3} \quad \text{et} \quad \beta_m = \frac{2^m - 1}{3} \quad \text{soit} \quad \text{diag}(A_m) = \frac{1}{3 \cdot 2^m} (2^m + 2, 2^m - 1, 2^m - 1) \quad \text{qui conduit à}$$

$diag(A_{m+1}) = \frac{1}{2^m} \left(\frac{\alpha_m + \beta_m}{2}, \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}, \beta_m \right)$. D'où les formules suivantes que l'on vérifie par récurrence:

$$diag(A_m) = \frac{1}{3 \cdot 2^m} (2^m + 2, 2^m - 1, 2^m - 1) \quad \text{si } m \text{ pair}$$

$$diag(A_m) = \frac{1}{3 \cdot 2^m} (2^m + 1, 2^m + 1, 2^m - 2) \quad \text{si } m \text{ impair}$$

On constate bien que $f(A_m) = \frac{1}{2^m}$ pour tout m .

Quatrième partie

10. $R(A) = \{(AX|X) : X \in S\}$ où S désigne la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|$.

a) Soit λ une valeur propre réelle de A : il existe un vecteur propre X associé. Quitte à le normaliser, on peut supposer que $X \in S$ et alors, $(AX|X) = \lambda(X|X) = \lambda \in R(A)$.

Si $(e_i)_i$ désigne toujours la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$, on a $(Ae_i|e_i) = a_{ii} \in R(A)$.

b) - S étant compacte (fermée bornée en dimension finie), l'ensemble $R(A)$ est compact puisque image de S par l'application continue $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow (AX|X) \end{cases}$. Ainsi, $R(A)$ est fermé borné.

- On démontre que $R(A)$ est un intervalle en vérifiant sa convexité: on considère r_1 et r_2 deux éléments distincts de $R(A)$ qui s'écrivent $r_1 = (AX_1|X_1)$ et $r_2 = (AX_2|X_2)$ où X_1 et X_2 sont dans S ; il s'agit de démontrer que le segment $[r_1, r_2]$ est inclus dans $R(A)$.

- 1^{er} cas : $0 \notin [X_1, X_2] = \{(1-t)X_1 + tX_2 : t \in [0, 1]\}$.

On remarque que $R(A) = \{\phi'(X) : X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ où ϕ' est l'application continue $\begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow \frac{(AX|X)}{\|X\|^2} \end{cases}$

On considère $\psi : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \phi'[(1-t)X_1 + tX_2] \end{cases}$ **continue** et on lui applique le théorème des valeurs intermédiaires:

$$\psi(0) = r_1 \quad \text{et} \quad \psi(1) = r_2, \quad \text{donc} \quad \forall r \in [r_1, r_2] \quad \exists \theta \in [0, 1] \quad \psi(\theta) = r$$

et, en conséquence $[r_1, r_2] \subset \psi([0, 1]) = \phi'([X_1, X_2]) \subset R(A)$.

- 2^{ème} cas : $0 \in [X_1, X_2]$.

Les vecteurs X_1 et X_2 sont nécessairement liés donc $X_1 = X_2$ ou $X_1 = -X_2$ (puisque unitaires). Dans ce cas, on aurait $r_1 = r_2$ ce qui a été exclu.

REM: cette question peut aussi se démontrer à l'aide des matrices symétriques. On commence par démontrer que lorsque A est symétrique, $R(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont les valeurs propres extrémales de A (se prouve en réduisant la forme quadratique associée à A). Pour A quelconque,

on considère $A^+ = \frac{(A + {}^tA)}{2}$ la partie symétrique de A et on remarque que $R(A) = R(A^+)$ puisque $(A^+X|X) = \frac{1}{2} [{}^t(AX)X + {}^t(AX)X] = (AX|X)$.

c) Dans cette question, la symétrie de A ne sert pas.

Le segment $R(A)$ contient (d'après 10.a)) tous les a_{ii} où $1 \leq i \leq n$ donc contient leur moyenne $\frac{tr(A)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Lorsque $tr(A) = 0$, on déduit que $0 \in R(A)$.

d) $t = tr(A) \in R(A)$ donc s'écrit $t = (AX_1|X_1)$ où $X_1 \in S$. On peut compléter par $X_2, X_3, \dots, X_n$ de telle façon que $\mathcal{X} = (X_i)_i$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Si u désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A , on obtient:

$$A' = Mat_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} t & L_1 \\ C_1 & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{où } C_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}), L_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, A et A' sont orthosemblables et $\text{tr}(A') = \text{tr}(A) = t + \text{tr}(A_1)$ donc $\text{tr}(A_1) = 0$. La troisième partie a démontré que A_1 est orthosemblable à une matrice B_1 de diagonale nulle ce qui prouve l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{X}' = (X'_i)_i$ telle que $B = \text{Mat}_{\mathcal{X}}(u) = \begin{bmatrix} t & L'_1 \\ C'_1 & B_1 \end{bmatrix}$. Donc A est orthosemblable à cette matrice B de diagonale $(t, 0, 0, \dots, 0)$.

Cinquième partie

12.

a) D'après 5. A est semblable à une matrice $B = (b_{ij})_{ij}$ telle que $\forall i \in [1..n] \ b_{ii} \neq 0$.

On considère la matrice triangulaire supérieure $Y = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & -b_{12} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit $\begin{cases} y_{ij} = -b_{ij} \text{ si } i < j \\ y_{ii} = 1 \\ y_{ij} = 0 \text{ si } i > j \end{cases}$.

La matrice $B + Y$ est triangulaire inférieure avec $\text{diag}(B + Y) = (1 + b_{11}, 1 + b_{22}, \dots, 1 + b_{nn})$.

Les spectres (réels ou complexes) sont $\text{Sp}(Y) = \{1\}$ et $\text{Sp}(B + Y) = \{1 + b_{ii} : 1 \leq i \leq n\}$.

Ils sont disjoints car les b_{ii} sont non nuls.

b) Par définition de B , il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Par suite, la matrice $X = P^{-1}YP$ vérifie $A + X = P^{-1}(B + Y)P$ donc $\text{Sp}(X) = \text{Sp}(Y)$ et $\text{Sp}(A + X) = \text{Sp}(B + Y)$.

13. $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}) \ T(A) \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Pour λ réel, on a:

$$\begin{aligned} \det(T(I)^{-1}T(A) - \lambda I) &= \det(T(I)^{-1}[T(A) - \lambda T(I)]) = \det(T(I)^{-1}) \det(T(A) - \lambda T(I)) = \\ &= \det(T(I))^{-1} \det(T(A - \lambda I)) \text{ car } T \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Il en résulte que si λ est dans le spectre réel de $T(I)^{-1}T(A)$ alors $\det(T(I)^{-1}T(A) - \lambda I) = 0$ donc $\det(T(A - \lambda I)) = 0$. Comme la matrice $A - \lambda I$ ne peut être inversible, on en déduit que λ est dans le spectre réel de A . Donc $\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I)^{-1}T(A)) \subset \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)}$

b) Erreur d'énoncé...du moins pour n pair.

Pour démontrer que T est inversible, il suffit de prouver que son noyau est réduit à $\{0\}$ puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ **non nulle** telle que $T(A) = 0$. On peut lui appliquer les résultats de la question 12. à savoir l'existence d'une matrice non nulle $X \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(A + X) \cap \text{Sp}(X) = \emptyset$.

Précision: pour les matrices triangulaires Y et $B + Y$ (donc également pour X et $A + X$) le spectre réel et le spectre complexe sont confondus.

D'après 13.a) $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I)^{-1}T(X)) \subset \text{Sp}_{\mathbb{R}}(X)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I)^{-1}T(A + X)) \subset \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A + X)$.

Or $T(A + X) = T(A) + T(X) = T(X)$ ce qui conduit à

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(T(I)^{-1}T(X)) \subset \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A + X) \cap \text{Sp}_{\mathbb{R}}(X) = \emptyset$$

On arrive à une contradiction si on prouve que le **spectre réel** $T(I)^{-1}T(X)$ est non vide ce qui est vrai pour n impair.

Mais pour n pair, l'application T n'est pas nécessairement inversible comme le prouve le contre-exemple suivant (pour $n = 2$).

$$T : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$