Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Centrale I, 2025, filière PSI.
Version provisoire du 28/04/2025

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Conditionnement d'une matrice et applications

Partie A - Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I - Etude de l'application N

Q1. On a

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

et d'après Cauchy-Schwarz,

$$((AX)_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) \le M^2 \times 1.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} ((AX)_i)^2 \le M^2 n$$

et donc

$$\boxed{\|AX\| \le M\sqrt{n}}.$$

Q2. L'ensemble $\{\|AX\|\,,\ X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée par $M\sqrt{n}$. Elle possède donc une borne supérieure et

$$\sup\{\|AX\|\,,\ X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\} \le M\sqrt{n}.$$

Ceci montre que $\boxed{N \text{ est bien définie}}$.

Si $X_0 \neq 0$, le vecteur $v_0 = \dfrac{X_0}{\|X_0\|}$ est de norme 1, donc

$$\frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \|Av_0\| \le N(A)$$

et par passage à la borne supérieure en X_0

$$\sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} \le N(A).$$

Par ailleurs, si $\|X\| = 1$,

$$\|AX\| = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \le \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$$

et par passage à la borne supérieure en X

$$N(A) \le \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}.$$

Tout ceci montre que

$$\boxed{N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}}.$$

Q3. • La fonction N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- On a bien

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|\lambda A X_0\|}{\|X_0\|} = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{|\lambda|\, \|AX_0\|}{\|X_0\|} = |\lambda| \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = |\lambda| N(A).$$

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a pour tout $X_0 \neq 0$,

$$\frac{\|(A+B)X_0\|}{\|X_0\|} \leq \frac{\|AX_0\| + \|BX_0\|}{\|X_0\|} \leq N(A) + N(B).$$

  Le terme de droite étant indépendant de X_0, on peut passer à la borne supérieure en X_0 et il vient

$$N(A+B) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|(A+B)X_0\|}{\|X_0\|} \leq N(A) + N(B).$$

- Enfin, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$. On en déduit que $AX = 0$ pour tout $X \neq 0$, en particulier pour les vecteurs de la base canonique, ce qui implique que $A = 0$.

Tout ceci montre que $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q4. Si N est une matrice nilpotente non nulle, toutes les valeurs propres de N sont nulles. On a donc $\rho(N) = 0$ et $N \neq 0$ donc $\boxed{S \text{ n'est pas une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (sauf si $n = 1$ bien sûr).

Q5. Comme Δ est diagonale, on a

$$\|\Delta X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 x_i^2} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|\, \|X\|$$

donc par passage à la borne supérieure en X,

$$N(\Delta) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|.$$

Soient alors i_0 tel que $|\delta_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$ et $X = E_{i_0}$. On a

$$\|E_{i_0}\| = 1 \text{ et } \|\Delta E_{i_0}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$$

$$N(\Delta) \geq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$$

et finalement

$$\boxed{N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|}.$$

Q6. La fonction $X \mapsto \|AX\|$ est continue sur le compact non vide $K = \{X \in \mathbb{R}^n\,,\ \|X\| = 1\}$ donc atteint sa borne supérieure d'après le théorème des bornes atteintes. On a donc bien

$$\boxed{N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|}.$$

Q7. Pour $X \neq 0$, on a

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq N(A)$$

donc $\|AX\| \leq N(A)\|X\|$. Cette inégalité étant évidente pour $X = 0$, on a bien

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\| \leq N(A)\|X\|}.$$

Q8. Pour $X \neq 0$, on a

$$\frac{\|(AB)X\|}{\|X\|} = \frac{\|A(BX)\|}{\|X\|} \underset{\mathbf{Q7}}{\leq} \frac{N(A)\|BX\|}{\|X\|} = N(A)\frac{\|BX\|}{\|X\|} \leq N(A)N(B),$$

puis par passage à la borne supérieure en X,

$$\boxed{N(AB) \leq N(A)N(B)}.$$

Q9. On a $C_i = AE_i$ et $\|E_i\| = 1$ donc de suite
$$\|AE_i\| \leq N(A).$$
Ceci étant vrai pour tout i, il vient
$$\boxed{\max_{1\leq i\leq n} \|AE_i\| \leq N(A)}.$$

Q10. D'après **Q9**, on a $\|C_n\| \leq N(A)$.
Par ailleurs, pour tout $X \neq 0$,
$$\|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{in}^2 x_n^2} = \|C_n\| \, |x_n| \leq \|C_n\| \, \|X\|$$
et donc
$$N(A) = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \|C_n\|$$
et finalement $\boxed{N(A) = \|C_n\|}$.

On en déduit que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boxed{N(A) = \sqrt{2}}$.

II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Q11. Les matrices orthogonales sont les matrices d'isométries vectorielles pour la norme $\|\cdot\|$ donc $\boxed{N(U) = 1}$ pour toute matrice orthogonale U.

Q12. Pour la même raison que précédemment, $\|UAX\| = \|AX\|$ pour tout X, donc
$$\boxed{N(UA) = \sup_{X\neq 0} \frac{\|UAX\|}{\|X\|} = \sup_{X\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = N(A)}.$$

Q13. On peut se passer de l'indication en remarquant que $\{UX \, , \, \|X\| = 1\} = \{Y \, , \, \|Y\| = 1\}$ (autrement dit, U envoie de façon bijective la sphère unité sur elle-même). De là,
$$\boxed{N(AU) = \sup_{\|X\|=1} \|AUX\| \underset{Y=UX}{=} \sup_{\|Y\|=1} \|AY\| = N(A)}.$$
Si on souhaite respecter la consigne, soit X_0 de norme 1 tel que $N(A) = \|AX_0\|$ (dont l'existence est assurée par **Q6**). Posons $Y_0 = U^{-1}X_0$. Alors $\|Y_0\| = 1$ et
$$N(AU) \geq \|AUY_0\| = \|AX_0\| = N(A).$$
Puis, pour tout X de norme 1,
$$\|AUX\| \leq N(A)\|UX\| = N(A)$$
donc par passage à la borne supérieure,
$$N(AU) \leq N(A)$$
et donc $\boxed{N(AU) = N(A)}$.

Q14. D'après le théorème spectral, il existe U orthogonale et Δ diagonale réelle (dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A) telles que $A = U\Delta U^T$. D'après **Q12-13**, on a $N(A) = N(\Delta)$ et d'après **Q5**, $N(\Delta) = \rho(A)$. De là, $\boxed{N(A) = \rho(A)}$.

Q15. On a $A \in S_3(\mathbb{R})$ et $A = I_3 + J$ où J est la matrice de rang 1 dont tous les termes sont égaux à 1. Les valeurs propres de J sont 0, 0 et 3 donc celles de A sont 1, 1 et 4. On en déduit que $\boxed{N(A) = 4}$.

Partie B - Conditionnement d'une matrice pour la norme N

I - Quelques résultats sur le conditionnement

Q16. D'après **Q8**,

$$\boxed{1 = N(I_n) = N(AA^{-1}) \leq N(A)N(A^{-1}) = \text{cond}(A)}.$$

Q17. On a

$$N(\alpha A) = |\alpha| N(A) \text{ et } N((\alpha A)^{-1}) = N(\alpha^{-1}A^{-1}) = |\alpha^{-1}| N(A^{-1})$$

et donc

$$\boxed{\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)}.$$

Q18. Si U est orthogonale, U^{-1} l'est aussi donc d'après **Q11**, $N(U) = N(U^{-1}) = 1$ et donc $\boxed{\text{cond}(U) = 1}$.

Q19. D'après **Q12-13**, on a de suite

$$\boxed{\text{cond}(UA) = \text{cond}(AU) = \text{cond}(A)}.$$

II - Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

Q20. On a $A = I_n + 2N$ où N est la matrice avec des 1 immédiatement au dessus de la diagonale et des 0 partout ailleurs. Cette matrice N vérifie

$$NE_1 = 0 \text{ et } \forall k \geq 2,\ NE_k = E_{k-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
AX &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k} (I_n + 2N) E_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k+1} E_{k-1} \\
&\underset{j=k-1}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j-1} 2^{n-j} E_j \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{n-k} + (-1)^{n-k-1}\right) 2^{n-k} E_k + E_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 0 \times E_k + E_n \\
&= E_n.
\end{aligned}$$

Q21. On a $X = A^{-1}E_n$ donc

$$\|X\| \leq N(A^{-1}) \|E_n\| = N(A^{-1}).$$

Or,

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} 4^{n-k} = \frac{4^n - 1}{3}$$

et

$$\frac{4^n - 1}{3} = \frac{(3+1) \times 4^{n-1} - 1}{3} = 4^{n-1} + \frac{4^{n-1} - 1}{3} \geq 4^{n-1}.$$

On en déduit que $\|X\|^2 \geq 4^{n-1}$ puis que $\|X\| \geq 2^{n-1}$ et enfin que $\boxed{2^{n-1} \leq N(A^{-1})}$.

Q22. On a $AE_2 = E_2 + 2E_1$ donc $\|AE_2\| = \sqrt{5} > 2$. Comme $\|E_2\| = 1$, on en déduit que $N(A) > 2$ et enfin que $\boxed{\text{cond}(A) > 2^{n-1} \times 2 = 2^n}$.

Partie C - Conditionnement pour une matrice réelle inversible

Q23. Pour tout X de norme 1, on a par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle SX, X\rangle| \leq \|SX\| \leq N(S) \underset{\mathbf{Q14}}{=} \lambda_n$$

donc

$$\sup_{\|X\|=1} |\langle SX, X\rangle| \leq \lambda_n.$$

Pour $X = V_n$, on a de plus $|\langle SV_n, V_n\rangle| = |\lambda_n| = \lambda_n$, donc le sup est un max et on a bien

$$\boxed{\sup_{\|X\|=1} |\langle SX, X\rangle| = \lambda_n}.$$

Commentaire personnel : les valeurs absolues sont inutiles puisque S est supposée symétrique positive.

Q24. La matrice $A^T A$ est évidemment symétrique et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$X^T(A^T A)X = \|AX\|^2 \geq 0.$$

Donc $\boxed{A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})}$.

On a alors d'après **Q23** et croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{N(A^T A) = \sup_{\|X\|=1} \langle A^T AX, X\rangle = \sup_{\|X\|=1} \langle AX, AX\rangle = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|^2 = \left(\sup_{\|X\|=1} \|AX\|\right)^2 = N(A)^2}.$$

Commentaire personnel : l'hypothèse A non nulle est stupide.

Q25. A l'aide de **Q24** et **Q14**, on a de suite

$$\boxed{N(A) = \sqrt{N(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)}}.$$

Commentaire personnel : l'hypothèse A non nulle est stupide.

Q26. Comme $A^T A = A^{-1} A A^T A$, les matrices AA^T et $A^T A$ sont semblables : elles ont donc même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres en tenant compte des multiplicités.

Q27. On a

$$N(A) = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\mu_M}.$$

Et

$$N(A^{-1}) = \sqrt{\rho((A^{-1})^T A^{-1})} = \sqrt{\rho((A^T)^{-1} A^{-1})} = \sqrt{\rho((AA^T)^{-1})}.$$

Or, les valeurs propres de $(AA^T)^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de AA^T et donc d'après **Q26** les inverses des valeurs propres de $A^T A$. Comme

$$0 < 1/\mu_M < 1/\mu_m,$$

on a $\rho((AA^T)^{-1}) = 1/\mu_m$ et finalement

$$N(A^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_m}}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{cond}(A) = N(A)N(A^{-1}) = \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}}}.$$

Q28. Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, écrivons

$$0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

ses valeurs propres. Les valeurs propres de $A^2 = A^T A$ sont donc les

$$0 < \lambda_1^2 \leq \cdots \leq \lambda_n^2$$

et on déduit de **Q27** que

$$\boxed{\operatorname{cond}(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}}.$$

Partie D - Calcul explicite de conditionnement

Q29. La matrice T est symétrique réelle donc ses valeurs propres sont réelles d'après le théorème spectral.
Q30. La l-ième composante de TU_k est

$$\begin{aligned}
-\sin\left(\frac{(l-1)k\pi}{n+1}\right) + 2\sin\left(\frac{lk\pi}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{(l+1)k\pi}{n+1}\right) &= 2\sin\left(\frac{lk\pi}{n+1}\right) - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{lk\pi}{n+1}\right) \\
&= 2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)\sin\left(\frac{lk\pi}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Comme $U_k \neq 0$ quand $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$, ceci montre que U_k est un vecteur propre de T pour la valeur propre

$$\boxed{\lambda_k = 2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}.$$

Q31. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, les λ_k définissent n valeurs propres distinctes. On en déduit que les valeurs propres de T sont simples et sont les réels $\boxed{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$.
Q32. Utilisons **Q23** : comme les valeurs propres de T sont toutes > 0, il s'agît de trouver la plus petite et la plus grande. Par croissance de la fonction $\sin^2$ sur $[0, \pi/2]$, la plus petite est obtenue pour $k = 1$ et vaut $4\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ et la plus grande des valeurs propres de T est obtenue pour $k = n$ et vaut $4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{cond}(T) = \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}}.$$

Partie E - Inégalité de Kantorovich

I - Une première démonstration

Q33. C'est une répétition ridicule de **Q28** :

$$\boxed{\operatorname{cond}(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}}.$$

Q34. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_A$ et aux vecteurs $A^{-1}X$ et X :

$$\left((A^{-1}X, X)_A\right)^2 \leq (A^{-1}X, A^{-1}X)_A (X, X)_A.$$

Ceci s'écrit

$$\langle AA^{-1}X, X\rangle^2 \leq \langle AA^{-1}X, A^{-1}X\rangle\langle AX, X\rangle$$

c'est-à-dire exactement

$$\boxed{\|X\|^4 \leq \langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle}.$$

Q35. La fonction P est un polynôme de degré 2, de racines $\lambda_1 < \lambda_n$, de coefficient dominant > 0. On en déduit que P est à valeurs négatives sur $[\lambda_1, \lambda_n]$ et en particulier que

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(\lambda_k) \leq 0}.$$

Q36. En diagonalisant A, on obtient de suite que les valeurs propres de B sont les $\boxed{P(\lambda_k)/\lambda_k}$ répétées suivant les multiplicité des λ_k comme valeurs propres de A.
D'après **Q35**, les valeurs propres de $-B$ sont donc positives, ce qui montre que $-B \in S_n^+(\mathbb{R})$ et donc que

$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \langle BX, X\rangle \leq 0}.$$

Q37. On a

$$\begin{aligned} f(1) &= \langle AX, X\rangle - (\lambda_1 + \lambda_n)\langle X, X\rangle + \lambda_1\lambda_n\langle A^{-1}X, X\rangle \\ &= \langle AX - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1\lambda_n A^{-1}X, X\rangle \\ &= \langle A^{-1}(A^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)A + \lambda_1\lambda_n I_n)X, X\rangle \\ &= \langle BX, X\rangle. \end{aligned}$$

De là, comme $A^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, **Q34** implique que

$$f(0)f(1) = \lambda_1\lambda_n\langle A^{-1}X, X\rangle\langle BX, X\rangle \leq 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est donc ≥ 0, ce qui signifie exactement que

$$\boxed{(\lambda_1 + \lambda_n)^2\|X\|^4 - 4\lambda_1\lambda_n\langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle \geq 0}.$$

Q38. La première inégalité de (K) est fournie par **Q34**.
Pour la deuxième, **Q37** s'écrit encore

$$\begin{aligned} \langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle &\leq \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_n}}\right)^2 \|X\|^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|X\|^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cond}(A)}} + \sqrt{\operatorname{cond}(A)}\right)^2 \|X\|^4. \end{aligned}$$

Ceci démontre la deuxième partie de (K).

II - Une deuxième démonstration

Q39. On a $x_i^2 \geq 0$ pour tout i et

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z = \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2 = 1$$

donc $\boxed{\mathbb{P} \text{ ainsi définie est bien une loi de probabilité}}$.

Q40. Les λ_i sont non nuls donc $1/Z$ est bien une variable aléatoire. Les deux variables aléatoires Z et $1/Z$ sont d'univers-image finie donc admettent une espérance.
Puis

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Or,

$$\langle AX, X\rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i x_i x_j \langle C_i, C_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \langle AX, X\rangle}$ et de façon analogue $\boxed{\mathbb{E}(1/Z) = \langle A^{-1}X, X\rangle}$.

Q41. Comme $Z \geq \lambda_1$ et $Z \leq \lambda_n$, on a $(Z - \lambda_1)(Z - \lambda_n) \leq 0$. De là,

$$Z\big(Z - (\lambda_1 + \lambda_n)\big) + \lambda_1\lambda_n \leq 0,$$

puis

$$\lambda_1\lambda_n \leq -Z\big(Z - (\lambda_1 + \lambda_n)\big)$$

et en divisant par $\lambda_1\lambda_n Z > 0$, il vient

$$\boxed{\frac{1}{Z} \leq \frac{Z\big((\lambda_1+\lambda_n)-Z\big)}{\lambda_1\lambda_n}}.$$

Q42. Par croissance de l'espérance

$$\mathbb{E}(1/Z) \leq \frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left((\lambda_1+\lambda_n)-\mathbb{E}(Z)\right).$$

En multipliant par $\mathbb{E}(Z) > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(1/Z) &\leq \frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left((\lambda_1+\lambda_n)\mathbb{E}(Z)-(\mathbb{E}(Z))^2\right)\\
&= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left(\left(\mathbb{E}(Z)-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)^2-\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)^2\right).\\
&= -\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left(\mathbb{E}(Z)-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.
\end{aligned}$$

Q43. Comme $-\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left(\mathbb{E}(Z)-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}\right)^2 \leq 0$ et comme

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}}+\sqrt{\mathrm{cond}(A)}\right)^2,$$

on déduit de **Q40** et **Q42** que pour tout X de norme 1,

$$\langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle = \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(1/Z) \leq \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}}+\sqrt{\mathrm{cond}(A)}\right)^2.$$

Si $X \neq 0$ est quelconque, on applique ce qui précède à $\frac{X}{\|X\|}$ et il vient

$$\boxed{\langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cond}(A)}}+\sqrt{\mathrm{cond}(A)}\right)^2\|X\|^4},$$

inégalité valide aussi pour $X = 0$.