

Exercice 1

1. $\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
2.
$$\frac{f(x,y) - x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

donc $\frac{f(x,y) - x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x,y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.

Alors f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2

1. Voir cours.
2. Voir cours pour la première partie de la question. L'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas forcément un compact.
Il suffit de considérer la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$, l'image réciproque du compact $[-1, 1]$ par son intermédiaire est $\mathbb{R}$ tout entier, qui n'est pas un compact.

Problème

Partie préliminaire

1. a) la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, \pi]$ prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0, \pi]$.
- b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$. et donc si $t \neq 0$,
$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

Soit la fonction f somme de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$. f est naturellement DSE sur $\mathbb{R}$, chacune de ses primitives l'est aussi, si on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

alors

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comme $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ alors

$$F(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \pi^{2n+1}$$

Soit $I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

2. a) Utiliser de D'Alembert, ou alors mentionner le fait que la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (c'est du cours).

Si on pose $a_n = \frac{\pi^n}{n \cdot n!}$ alors $a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi}{(n+1)!(n+1)} \leq \frac{\pi}{2 \cdot 2} \leq 1$ si $n \geq 1$.

donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Elle converge vers 0 puisque $a_n \leq \frac{\pi^n}{n!}$.

- b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_{2n+1}$ donc $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial de convergence des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$

est convergente et si on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ alors

$$|R_n| \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)}$$

Nous allons maintenant approcher le réel $\frac{2}{\pi} I$ par les termes $\frac{2}{\pi} S_n$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum (-1)^n u_n$.

$$\left| \frac{2}{\pi} S_n - \frac{2}{\pi} I \right| = \frac{2}{\pi} |R_n| \leq 2 \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!(2n+3)} \leq 2 \frac{10^{n+1}}{(2n+3)!(2n+3)}$$

Pour que $\frac{2}{\pi} S_n$ approche $\frac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près, il suffit que $2 \frac{10^{n+1}}{(2n+3)!(2n+3)} \leq 10^{-2}$

soit $(2n+3)!(2n+3) \geq 2 \cdot 10^{n+3}$.

$n = 3$ suffit et dans ce cas $\frac{2}{\pi} S_n \simeq 1,17$

Partie 1 : Phénomène de Gibbs

3. Vu la parité de la fonction f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, et par un calcul simple $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ses points de discontinuité sont ceux de la forme $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, point où f est continue

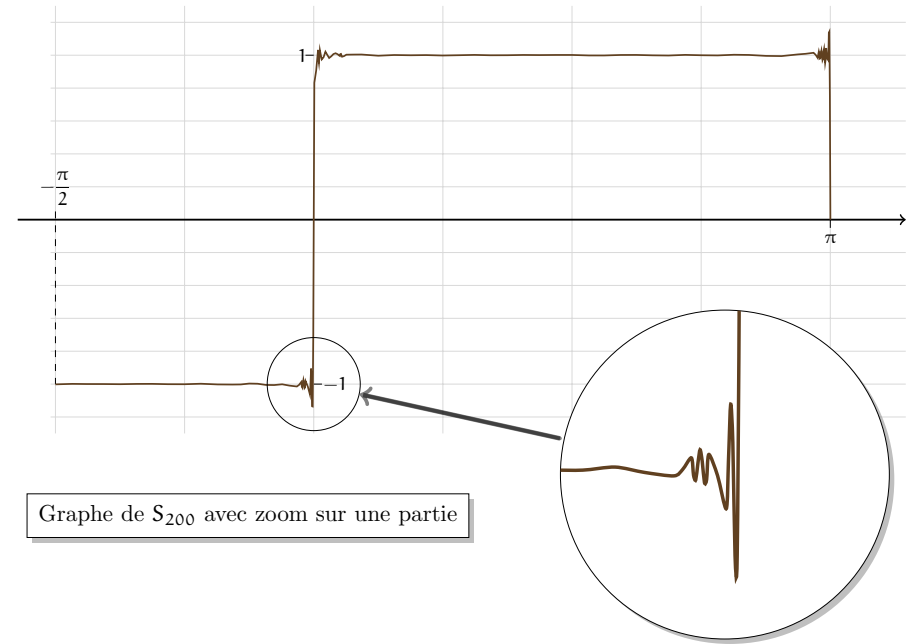
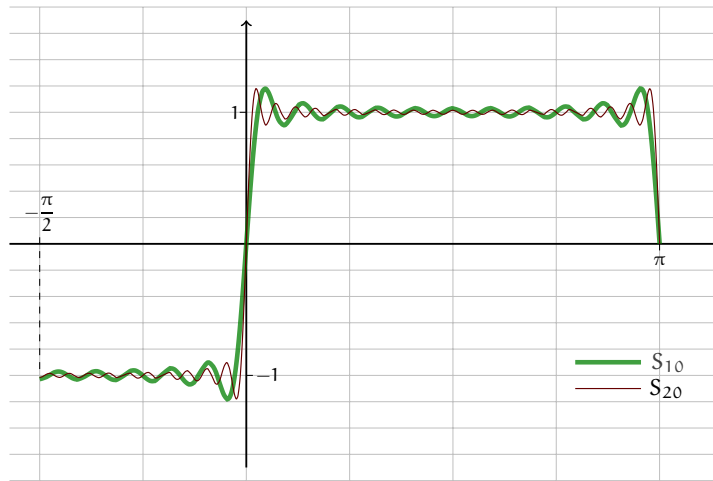
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \sin[(2k+1)t] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}$$

égalité encore valable lorsque $t \in \pi\mathbb{Z}$ puisque dans ce cas $\sin[(2k+1)t] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = 0$.

La suite de fonction $(S_n)_n$ converge donc simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

La convergence n'est pas uniforme puisque les fonctions S_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ est que f ne l'est pas.

4. Les graphes des fonctions S_{10} , S_{20} et séparément celui de S_{200} pour une meilleure illustration du phénomène, sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$.



Au voisinage de 0, que ce soit à droite ou à gauche, la convergence de S_n vers f n'est pas uniforme. On perçoit de fortes perturbations de la fonction S_n au voisinage de 0, au fur et à mesure que n grandit. C'est le phénomène de Gibbs.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin[(2k+1)t] = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)t} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2it})^k \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(e^{it} \frac{1 - e^{2int}}{1 - e^{2it}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{it} - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{2it}} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{-2i \sin(nt) e^{i(n+1)t}}{-2i \sin(t) e^{it}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} e^{int} \right) \\ &= \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \end{aligned}$$

- b) Soit un segment $[a, b] \subset]0, \pi/2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a, b]$

$$T_n(t) \leq \frac{1}{\sin a}$$

On pose alors $M = \frac{1}{\sin a}$.

- c) On exécute la transformation dite d'Abel, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
S_{n+p}(t) - S_n(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_{k+1}(t) - T_k(t)}{2k+1} \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\sum_{k=n+2}^{n+p+1} \frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(t)}{2k+1} \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_{n+p+1}}{2(n+p+1)-1} - \frac{T_{n+1}}{2(n+1)-1} + \sum_{k=n+1}^{n+p} T_k(t) \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

De quoi on déduit

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}(t) - S_n(t)| &\leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{1}{2n+2p+1} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right) \\
&\leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n+2p+1} \right) \right) \\
&\leq \frac{4M}{\pi} \cdot \frac{3}{2n+1} = \frac{12M}{\pi(2n+1)}
\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit un entier N tel que $\frac{12M}{\pi(2N+1)} \leq \varepsilon$. Pour tous $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [a, b]$ on a alors

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq \varepsilon$$

Ceci démontre que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Convergence qui se fait vers f puisque on a déjà vu qu'il y'a convergence simple vers f sur $\mathbb{R}$.

6. a) Soit $t \in]0, \pi/2[$.

$$\begin{aligned}
S'_n(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)t] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n e^{i(2k+1)t} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} e^{int} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t} \\
S'_n(t) = 0 &\iff \sin 2nt = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}; t = \frac{k}{2n}\pi
\end{aligned}$$

La plus petite valeur qui annule S'_n sur $]0, \pi/2[$ est donc le réel $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$.

b) On a vu que pour tout $t \in]0, \pi/2[$, $S'_n(t) = \frac{\sin 2nt}{\sin t}$. La fonction $s_n : t \mapsto \frac{\sin 2nt}{\sin t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $s_n(0) = 2n$.

S_n , qui est de classe $\mathcal{C}^1$, est alors une primitive de s_n sur le segment $[0, \pi/2]$ avec $S_n(0) = 0$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $x \in [0, \pi/2]$

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x s_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

l'intégrale du dernier terme de cette égalité se faisant sur l'intervalle $]0, x[$. De là

$$S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \stackrel{u=2nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du$$

c) En observant que $\frac{\sin u}{\sin(u/2n)} \sim \frac{\sin u}{u/2n}$ au voisinage de 0, on peut faire l'hypothèse que

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du \longrightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \quad (*)$$

chose qu'on va s'atteler à démontrer.

On va utiliser les inégalités connues :

$$\forall t \in [0, \pi/2], \sin t \geq \frac{2}{\pi} t \quad (\text{concavité de } \sin \text{ sur } [0, \pi/2])$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t - t| \leq \frac{1}{6} |t|^3 \quad (\text{inégalité de Taylor-Lagrange}).$$

On a alors pour tout $t \in]0, \pi/2[$

$$\left| \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right| = \frac{|t - \sin t|}{t \sin t} \leq \frac{\frac{1}{6} t^3}{t \cdot \frac{2}{\pi} t} \leq \frac{\pi}{12} t$$

Si maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, \pi[$ alors $\frac{u}{2n} \in [0, \pi/2]$ et donc

$$\left| \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} - \frac{\sin u}{u/2n} \right| \leq \frac{\pi}{12} \cdot \frac{u}{2n} |\sin u| \leq \frac{\pi^2}{24n}$$

On intègre sur $]0, \pi[$

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} - \frac{\sin u}{u/2n} \right| du \leq \frac{\pi^2}{24n^2}$$

Ce qui démontre l'assertion (*), assertion qui signifie que

$$S_n(\alpha_n) \longrightarrow \frac{2}{\pi} I$$

7. $\alpha_n \in]0, \pi/2[$ donc $f(\alpha_n) = 1$ et donc

$$\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)| \geq |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \geq |S_n(\alpha_n) - 1|$$

Puisque $(S_n(\alpha_n))$ converge vers $\frac{2}{\pi} I$ est que $\frac{2}{\pi} I \simeq 1,17$ d'après la question (2.b.) alors la quantité

$$\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$$

ne peut converger vers 0, car sinon $(S_n(\alpha_n))$ convergerait vers 1.

N.B : La question revient à démontrer que la suite de fonctions $(S_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. Tout le bric à brac mis en œuvre pour y arriver, en dehors de son aspect sportif, est inutile. En effet il suffisait de mettre en défaut le théorème d'intervention

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} S_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

La première double limite valant 0, la seconde 1.

La question aurait eu plus d'intérêt si elle s'était orientée vers une minoration effective de $\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$.

Partie 2 : Démonstration du théorème de la convergence normale

8. La formule de Parseval pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux 2π -périodique

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Si f est continue et tous ses coefficients de Fourier sont nuls alors

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0 \quad (**)$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0, 2\pi]$, cela implique qu'elle est nulle sur ce segment et par périodicité, sur $\mathbb{R}$ tout entier. f est donc la fonction nulle.

Si maintenant f était seulement continue par morceaux, l'égalité $(**)$ est toujours valable, elle implique que f s'annule en tout point où elle est continue, et donc pas forcément partout nulle, sauf si ... elle était continue.

(Précisons, si f est 2π -périodique, continue par morceaux et vérifie l'égalité $(**)$ alors $f = 0 \iff f$ est continue)

9. f est continue 2π -périodique et sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$$

a) les fonctions $t \mapsto c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, grâce à la convergence uniforme sur le **segment** $[0, 2\pi]$ on peut intégrer terme à terme l'expression $g(t)e^{-int}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{c_0(g)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(c_p(f) \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} dt + c_{-p}(f) \int_0^{2\pi} e^{-i(p+n)t} dt \right)$$

Comme pour tout $(k, h) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{kh}$ une seule des intégrales figurant dans cette expression est non nulle, elle est obtenue pour $p = n$ si $n \geq 0$, pour $p = -n$ si $n < 0$. Ce qui nous mène à l'égalité

$$c_n(g) = c_n(f)$$

b) $f - g$ est continue 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ et par linéarité des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$$

D'après la question (8.) on a donc $g = f$.

10. a) f étant **continue** et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, une intégration par parties donne

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left([f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \right) = inc_n(f)$$

b) Pour deux nombres complexes a et b , $|ab| \leq \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2)$ (découle tout bêtement de $(|a| - |b|)^2 \geq 0$).

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ alors $u_n(f)(t) = \frac{1}{in} (c_n(f')e^{-int} - c_{-n}(f)e^{int})$ et donc

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{|c_n(f')|}{n} + \frac{|c_{-n}(f')|}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$$

c) La fonction f' étant continue par morceaux 2π -périodique, d'après la formule de Parseval les séries à termes réels positifs $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes. La majoration obtenue dans la question précédente achève de démontrer que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle converge vers la fonction g définie dans la question (9.), toujours d'après cette question, on a forcément $g = f$.

Ainsi $\sum u_n(f)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

d) Le phénomène de Gibbs ne subsiste plus pour une fonction 2π périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.