

Partie I : Étude de l'équation $y'' + y = h$

I.A.

I.A.1. Les solutions de (F_0) sont les fonctions $y : t \mapsto A \cos t + B \sin t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

I.A.2. On cherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes (ou, avec un peu d'expérience, sous la forme $t \mapsto at \sin t$), et on trouve $t \mapsto \frac{1}{2} t \sin t$. Les solutions de (F_h) sont alors les fonctions $y : t \mapsto A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

I.A.3. La fonction h , en fait définie sur \mathbb{R}_+ par $h(x) = \max\{\sin x, 0\} = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|)$, est continue sur \mathbb{R}_+ . Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires scalaires du second ordre permet alors d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution y , de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ , satisfaisant à des conditions initiales de la forme $(y(0), y'(0)) = (a, b)$; on en déduit que l'ensemble des solutions de (F_h) est un sous-espace affine de dimension deux de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Pour tout k entier naturel, considérons les intervalles $I_k = [2k\pi, (2k + 1)\pi]$ et $J_k = [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$. Si f est solution de (F_h) alors, sur chaque intervalle I_k , f a une expression de la forme $f(x) = a_k \cos x + b_k \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$ et, sur chaque intervalle J_k , f a une expression de la forme $f(x) = c_k \cos x + d_k \sin x$.

Les conditions de raccordement \mathcal{C}^1 au point $(2k + 1)\pi$ imposent $c_k = a_k - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ et $d_k = b_k - \frac{1}{2}$. Les mêmes conditions au point $(2k + 2)\pi$ imposent $a_{k+1} = c_k + (k + 1)\pi$ et $b_{k+1} = d_k + \frac{1}{2}$. Finalement, on choisit a_0 et b_0 arbitraires, puis, pour tout k entier naturel,

$$a_k = a_0 + k\frac{\pi}{2} \quad ; \quad b_k = b_0 \quad ; \quad c_k = a_0 - \frac{(k + 1)\pi}{2} \quad ; \quad d_k = b_0 - \frac{1}{2} .$$

Ainsi, les fonctions solutions de (F_h) sont définies par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \forall x \in [2k\pi, (2k + 1)\pi] & f(x) = \left(A + \frac{k\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \cos x + B \sin x \\ \forall x \in [(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi] & f(x) = \left(A - \frac{(k + 1)\pi}{2}\right) \cos x + \left(B - \frac{1}{2}\right) \sin x \end{cases} ,$$

où A et B sont deux réels arbitraires.

Remarque. Il n'est pas évident *a priori* que ces fonctions soient de classe \mathcal{C}^2 , mais cela résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz qui affirme l'existence de solutions \mathcal{C}^2 de l'équation différentielle (F_h) . On peut aussi appliquer la méthode de variation des constantes et donner les solutions de (F_h) sous la forme intégrale

$$f(x) = \left(\alpha - \int_0^x \sin t |\sin t| dt\right) \cos x + \left(\beta + \int_0^x \cos t |\sin t| dt\right) \sin x ,$$

avec α et β réels arbitraires.

I.B. Stabilité par rapport aux conditions initiales

Si $(a, b) = (0, 0)$, alors f est la fonction nulle et le résultat est évident, sinon on a $f(x) = a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = \|(a, b)\| \cos(x - \varphi)$, où φ est un réel (déterminé modulo 2π) tel que $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc $f \in B$ et $\|f\|_\infty = \|(a, b)\|$. Donc l'équation (F_0) est stable par rapport aux conditions initiales puisque, dans la définition de cette notion de stabilité, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta = \varepsilon$.

Notons au passage que la définition donnée en préambule pour cette notion de stabilité ne peut s'appliquer de façon raisonnable qu'aux équations sans second membre.

I.C. On écrit $f_0(t) = (\sin t) \int_0^t h(u) \cos u \, du - (\cos t) \int_0^t h(u) \sin u \, du$. Il apparaît ainsi que f_0 est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ , puis que $f_0'(t) = (\cos t) \int_0^t h(u) \cos u \, du + (\sin t) \int_0^t h(u) \sin u \, du$. De la même façon, f_0' est \mathcal{C}^1 , donc f_0 est \mathcal{C}^2 et

$$f_0''(t) = (-\sin t) \int_0^t h(u) \cos u \, du + (\cos t) \int_0^t h(u) \sin u \, du + h(t) = -f_0(t) + h(t),$$

donc f_0 est bien solution de (F_h) sur \mathbb{R}_+ . Les solutions de (F_h) sont alors les fonctions

$$t \mapsto f_0(t) + A \cos t + B \sin t.$$

I.D. Stabilité par rapport au second membre au sens 1

La fonction f_0 de la question précédente vérifie $f_0(0) = f_0'(0) = 0$, c'est donc la fonction f recherchée ici. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|f(t)| = |f_0(t)| \leq \int_0^t |h(u)| |\sin(t-u)| \, du \leq \int_0^t |h(u)| \, du \leq \|h\|_1,$$

donc $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|h\|_1$, ce qui est mieux que l'inégalité demandée par l'énoncé. Donc l'équation (F_h) (ou (F_0) ?) est stable par rapport au second membre au sens 1 puisque, dans la définition de cette notion de stabilité, à tout $\varepsilon > 0$, on peut encore associer $\eta = \varepsilon$ (ou $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, si l'on veut rester conforme aux indications de l'énoncé).

I.E. Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

L'équation $y'' + y = \delta \cos t$ admet pour solutions les fonctions $t \mapsto A \cos t + B \sin t + \frac{\delta}{2} t \sin t$, qui sont toutes des fonctions non bornées sur \mathbb{R}_+ puisque $A \cos t + B \sin t$ reste borné alors que $t \sin t$ ne l'est pas. On en déduit l'instabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞ puisque, pour tout $\eta > 0$, il existe des fonctions $h \in B$ telles que $\|h\|_\infty \leq \eta$ (par exemple $t \mapsto \eta \cos t$) et telles qu'aucune solution de (E_h) ne soit bornée.

Les fonctions f obtenues ci-dessus ne sont pas en $o(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ puisque $\frac{f(t)}{t} = \frac{A \cos t + B \sin t}{t} + \frac{\delta}{2} \sin t$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais cela ne me semble pas apporter grand'chose...

Partie II : Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$

II.A. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$, équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, est intégrable sur \mathbb{R}_+ , d'où l'existence de $I(\alpha)$ pour $\alpha > 1$. La fonction $g : (\alpha, t) \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $]1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$ et, si l'on fixe $a > 1$, on a la domination

$$\forall (\alpha, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad g(\alpha, t) \leq g(a, t) = \frac{1}{1+t^a},$$

la fonction dominante $t \mapsto g(a, t)$ étant intégrable sur \mathbb{R}_+ . Ceci permet d'affirmer la continuité de la fonction I sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$.

II.B. Relèvement angulaire

Nous supposons dans cette question que $k \geq 1$, cela sera utile pour la suite

II.B.1 La fonction $\frac{g'}{g}$ est définie et de classe \mathcal{C}^{k-1} (donc au moins continue) sur \mathbb{R}_+ , donc admet des primitives sur cet intervalle. Si A est une de ces primitives (alors de classe \mathcal{C}^k), on a $A' = \frac{g'}{g}$, donc $(g e^{-A})' = (g' - A'g) e^{-A} = 0$, d'où $g(t) e^{-A(t)} = K$, où $K \in \mathbb{C}^*$ est une constante.

II.B.2. La fonction A est de classe \mathcal{C}^k , donc les fonctions $B = \operatorname{Re}(A)$ et $C = \operatorname{Im}(A)$ le sont aussi ; posons $K = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$; alors

$$g(t) = K e^{A(t)} = r_0 e^{i\theta_0} e^{B(t)} e^{iC(t)} = r(t) e^{i\theta(t)},$$

avec $r(t) = r_0 e^{B(t)}$ et $\theta(t) = \theta_0 + C(t)$. On a bien $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

II.C. Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$

II.C.1. Posons $g = f + if'$; la fonction g est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{C}^* (si on avait $g(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}_+$ donné, alors $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, ce qui entraînerait que f est la fonction nulle, par unicité de la solution du problème de Cauchy correspondant). Le théorème de relèvement (question **II.B.**) permet alors d'écrire $g = r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, c'est-à-dire $f = r \cos \theta$ et $f' = r \sin \theta$. On en déduit $f^2 + f'^2 = r^2$ et, r étant à valeurs positives, $r = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

II.C.2. On a $f'' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta$. En réinjectant dans l'équation $(E_{\alpha,0}) : f'' - qf' + f = 0$, on obtient

$$r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta - qr \sin \theta + r \cos \theta = 0. \quad (*)$$

On a par ailleurs deux expressions de f' : $f' = r \sin \theta = (r \cos \theta)' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta$, d'où

$$r \sin \theta - r' \cos \theta + r\theta' \sin \theta = 0. \quad (**)$$

La combinaison linéaire $(*) \times \cos \theta + (***) \times \sin \theta$ donne $r + r\theta' - qr \sin \theta \cos \theta = 0$ et, en simplifiant par r qui est non nul, on voit que la fonction θ est solution de l'équation différentielle non linéaire

$$\theta' = -1 + q \sin \theta \cos \theta.$$

II.C.3. En dérivant la relation $r^2 = f^2 + f'^2$, on a $rr' = ff' + f'f''$ et l'équation $(E_{\alpha,0})$ multipliée par f' devient $rr' = qf'^2$, soit $rr' = qr^2 \sin^2 \theta$ et, en simplifiant encore par r qui est non nul, $r' = qr \sin^2 \theta$.

II.C.4. Posons $h(t) = q(t) \sin^2 \theta(t) = \frac{\sin^2 \theta(t)}{1 + t^\alpha}$. Alors r est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $r' = hr$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad r(t) = r(0) \exp \left(\int_0^t h(u) du \right).$$

La fonction h est intégrable sur \mathbb{R}_+ puisque $0 \leq h(t) \leq q(t)$ et $r(0) > 0$, donc la fonction r est croissante sur \mathbb{R}_+ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = r(0) \exp \left(\int_0^{+\infty} h(u) du \right) > 0 .$$

Par ailleurs, $0 \leq \int_0^{+\infty} h(u) du \leq \int_0^{+\infty} q(u) du = I(\alpha)$, donc $\lim_{+\infty} r \leq r(0) \exp(I(\alpha))$.

On a ensuite $0 \leq |f(t)| \leq r(t) \leq \lim_{+\infty} r \leq r(0) \exp(I(\alpha))$. Or,

$$\|(f(0), f'(0))\| = \|(r(0) \cos \theta(0), r(0) \sin \theta(0))\| = r(0) ;$$

on a ainsi prouvé que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|(f(0), f'(0))\| \exp(I(\alpha))$.

Avec $f'(t) = r(t) \sin \theta(t)$, on obtient la même majoration pour $\|f'\|_\infty$.

II.C.5. En intégrant la relation $\theta' = -1 + q \sin \theta \cos \theta$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \theta(t) + t = \theta(0) + \int_0^t q(u) \sin \theta(u) \cos \theta(u) du .$$

La fonction $u \mapsto q(u) \sin \theta(u) \cos \theta(u)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ car majorée en valeur absolue par q intégrable. Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + t) = \theta(0) + \int_0^{+\infty} q(u) \sin \theta(u) \cos \theta(u) du .$$

II.C.6. Posons $a := \lim_{+\infty} r \in \mathbb{R}_+^*$ et $b := -\lim_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + t)$. Écrivons alors $r(t) = a + \varepsilon(t)$ et $\theta(t) = -t - b - \eta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} f(t) &= r(t) \cos \theta(t) = (a + \varepsilon(t)) \cos(t + b + \eta(t)) \\ &= a [\cos(t + b) \cos \eta(t) - \sin(t + b) \sin \eta(t)] + o(1) \\ &= a \cos(t + b) \cos \eta(t) + o(1) = a \cos(t + b) (1 + o(1)) + o(1) = a \cos(t + b) + o(1) . \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) - a \cos(t + b)) = 0$.

II.C.7. La courbe représentative de f admet une "sinusoïde asymptote".

Partie III : Étude de la stabilité pour $\alpha > 1$

III.A. Stabilité par rapport aux conditions initiales

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \varepsilon \exp(-I(\alpha))$. D'après la question **II.C.4.**, si f est une solution de $(E_{\alpha,0})$ telle que $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$: l'équation différentielle $(E_{\alpha,0})$ est donc stable par rapport aux conditions initiales.

III.B. Stabilité par rapport au second membre au sens 1

III.B.1. On calcule

$$w' = f_1 f_2'' - f_1'' f_2 = f_1 (q f_2' - f_2) - (q f_1' - f_1) f_2 = q (f_1 f_2' - f_2 f_1') ,$$

autrement dit $w' = qw$. Donc $w(x) = w(0) \exp \left(\int_0^x q(t) dt \right)$ avec $w(0) \neq 0$ car le wronskien

d'un système fondamental ne s'annule jamais. On a donc $|w(x)| = |w(0)| \exp \left(\int_0^x q(t) dt \right)$, d'où

$$0 < |w(0)| \leq |w(x)| \leq |w(0)| \exp(I(\alpha)),$$

ce qui est bien le type d'encadrement demandé.

III.B.2. On résout l'équation $(E_{\alpha,h})$ par la méthode de variation des constantes : on recherche

f sous la forme $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ avec $\begin{cases} \lambda' f_1 + \mu' f_2 = 0 \\ \lambda' f_1' + \mu' f_2' = h \end{cases}$, ce qui conduit à $\lambda' = -\frac{h f_2}{w}$ et $\mu' = \frac{h f_1}{w}$; autrement dit, $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$ avec C_1 et C_2 primitives de $\frac{h f_2}{w}$ et $\frac{h f_1}{w}$ respectivement.

III.B.3. On a $f(0) = -C_1(0)f_1(0) + C_2(0)f_2(0)$ et $f'(0) = -C_1(0)f_1'(0) + C_2(0)f_2'(0)$. La condition $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$ conduit à la résolution d'un système linéaire homogène qui est de Cramer puisque son déterminant est le wronskien $w(0) \neq 0$. La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $C_1(0) = C_2(0) = 0$, autrement dit

$$f(x) = -f_1(x) \int_0^x \frac{h(t) f_2(t)}{w(t)} dt + f_2(x) \int_0^x \frac{h(t) f_1(t)}{w(t)} dt.$$

III.B.4. Les fonctions f_1 et f_2 sont bornées (**II.C.4**), posons $M = \max\{\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty\}$. Par ailleurs, $\frac{1}{|w(t)|} \leq \frac{1}{a}$, donc

$$|f(x)| \leq \frac{2M^2}{a} \int_0^x |h(t)| dt \leq \frac{2M^2}{a} \|h\|_1.$$

On obtient le résultat demandé avec $C = \frac{2M^2}{a}$.

Si on se donne $\varepsilon > 0$, en posant $\eta = \frac{a}{2M^2} \varepsilon$, on voit que pour $h \in L^1$ tel que $\|h\|_1 \leq \eta$, la solution de $(E_{\alpha,h})$ telle que $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$ est bornée sur \mathbb{R}_+ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc prouvé la stabilité de $(E_{\alpha,0})$ par rapport au second membre au sens 1.

III.C. Instabilité par rapport au second membre au sens ∞

III.C.1. Posons $h(t) = \Phi''(t) - \frac{1}{1+t^\alpha} \Phi'(t) + \Phi(t)$. On a alors

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(f''(t) - \frac{1}{1+t^\alpha} f'(t) + f(t) \right) - (g''(t) + g(t)) + \frac{g'(t)}{1+t^\alpha} \\ &= (\lambda \cos t) - (\lambda \cos t) + \frac{g'(t)}{1+t^\alpha} = \frac{g'(t)}{1+t^\alpha}. \end{aligned}$$

Or, la fonction g est de la forme $t \mapsto A \cos t + B \sin t + \frac{\lambda}{2} t \sin t$ (question **I.A.2.**), donc h est continue sur \mathbb{R}_+ et

$$h(t) = \frac{g'(t)}{1+t^\alpha} = \frac{-A \sin t + B \cos t + \frac{\lambda}{2} \sin t + \frac{\lambda}{2} t \cos t}{1+t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

III.C.2. C'est le théorème de Cesaro pour les intégrales : soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un réel $A > 0$ tel que $t \geq A \implies |h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $t > A$, on peut écrire

$$0 \leq \frac{1}{t} \int_0^t |h(u)| du = \frac{1}{t} \int_0^A |h(u)| du + \frac{1}{t} \int_A^t |h(u)| du \leq \frac{K}{t} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{t-A}{t} \leq \frac{K}{t} + \frac{\varepsilon}{2},$$

en posant $K = \int_0^A |h(u)| du$ (réel fixé). Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K}{t} = 0$, on aura $0 \leq \frac{K}{t} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour t plus grand qu'un certain réel positif B . Ainsi, $t \geq \max\{A, B\} \implies 0 \leq \frac{1}{t} \int_0^t |h(u)| du \leq \varepsilon$, soit $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |h(u)| du = 0$, soit encore $\int_0^t |h(u)| du = o(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

III.C.3. On a $\Phi(x) = -f_1(x) \int_0^x \frac{h(t) f_2(t)}{w(t)} dt + f_2(x) \int_0^x \frac{h(t) f_1(t)}{w(t)} dt$. Or, les fonctions $\frac{f_1}{w}$ et $\frac{f_2}{w}$ sont bornées (cf. questions **II.C.4.** et **III.B.1.**), donc les fonctions $\frac{hf_1}{w}$ et $\frac{hf_2}{w}$ ont une limite nulle à l'infini, d'où (question précédente) $\int_0^x \frac{h(t) f_i(t)}{w(t)} dt = o(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ($i = 1$ ou 2) ; comme on remultiplie ces intégrales par les fonctions f_1 et f_2 qui sont bornées, on déduit finalement $\Phi(x) = o(x)$ en $+\infty$. On écrira $\Phi(x) = x \omega(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = 0$.

III.C.4. Si on se donne $\lambda > 0$ quelconque, la fonction $h : t \mapsto \lambda \cos t$ est dans B et vérifie $\|h\|_\infty \leq \lambda$, mais la solution f de $(E_{\alpha, h})$ telle que $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$ n'est pas bornée puisque $f = g + \Phi$, donc f est de la forme

$$f : t \mapsto A \cos t + B \sin t + \frac{\lambda}{2} t \sin t + t \omega(t),$$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 0$, et une telle fonction n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$: on vérifie par exemple que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = +\infty$. Cela contredit la stabilité de $(E_{\alpha, 0})$ par rapport au second membre au sens ∞ .

III.D. Stabilité par rapport au paramètre

III.D.1. Simple vérification laissée au lecteur... Notons de plus que $(\Phi(0), \Phi'(0)) = (0, 0)$.

III.D.2. La fonction g est solution de $(E_{\beta, 0})$, donc g' est bornée et $\|g'\|_\infty \leq \|(a, b)\| e^{I(\beta)}$ (question **II.C.4.**). Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^\beta}$ étant intégrables sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que $h \in L^1$. Majorons

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \int_0^1 |h| + \int_1^{+\infty} |h| \\ &= \int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right| |g'(t)| dt + \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right| |g'(t)| dt \\ &\leq \|g'\|_\infty \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right| dt + \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right| dt \right) \\ &= \|g'\|_\infty \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)| \right). \end{aligned}$$

NB : l'égalité à la dernière étape est due au fait que l'expression $\frac{1}{1+t^\beta} - \frac{1}{1+t^\alpha}$ garde un signe constant sur chacun des deux intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$, donc l'intégrale de la valeur

absolue est égale à la valeur absolue de l'intégrale.

On a finalement $\|h\|_1 \leq \|(a, b)\| e^{I(\beta)} (|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|)$.

III.D.3. De la question **III.B.4.**, on déduit que

$$\|\Phi\|_\infty = \|f - g\|_\infty \leq C \|h\|_1 \leq C \|(a, b)\| e^{I(\beta)} (|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|).$$

Si on fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in [1, +\infty[$, la fonction

$$\Psi : \beta \mapsto C \|(a, b)\| e^{I(\beta)} (|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|)$$

est continue sur $[1, +\infty[$ et s'annule pour $\beta = \alpha$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta > 0$ tel que, si $\beta \in [1, +\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leq \eta$, alors $|\Psi(\beta)| \leq \varepsilon$. Alors pour g solution de $(E_{\beta,0})$ avec $(f(0), f'(0)) = (g(0), g'(0)) = (a, b)$, on aura bien $\|\Phi\|_\infty = \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. L'équation $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV : Étude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$

IV.A. On calcule $g'(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{t+1}} - \frac{f'(t)}{(t+1)^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{f(t)}{(t+1)^{5/2}}$, puis

$$g''(t) = -\frac{f(t)}{\sqrt{t+1}} + \frac{3}{4} \frac{f(t)}{(t+1)^{5/2}} = -g(t) + \frac{3}{4(t+1)^2} g(t).$$

Donc g est solution de l'équation différentielle proposée.

IV.B. La fonction g n'est pas la fonction nulle donc, d'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy, on a $(g(t), g'(t)) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En posant $h(t) = g(t) + ig'(t)$, la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{C}^* , donc (question **II.B.1.**) on peut écrire $h = \rho e^{i\beta}$ avec ρ et β de classe \mathcal{C}^1 . En fait, il est immédiat que g est de classe \mathcal{C}^∞ (elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout k par récurrence sur k), donc h aussi et finalement $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

IV.C. On a $g'' = \rho' \sin \beta + \rho \beta' \cos \beta$, donc

$$\rho' \sin \beta + \rho \beta' \cos \beta + \left(1 - \frac{3}{4(t+1)^2}\right) \rho \cos \beta = 0. \quad (1)$$

Par ailleurs, $g' = \rho \sin \beta = (\rho \cos \beta)' = \rho' \cos \beta - \rho \beta' \sin \beta$, donc

$$\rho \sin \beta - \rho' \cos \beta + \rho \beta' \sin \beta = 0. \quad (2)$$

Formons la combinaison linéaire $(1) \times \cos \beta + (2) \times \sin \beta$. Après simplifications, comme ρ ne s'annule pas, il reste

$$\beta' = -1 + \frac{3}{4(t+1)^2} \cos^2 \beta.$$

En intégrant, on obtient $\beta(x) + x = \beta(0) + \frac{3}{4} \int_0^x \frac{\cos^2 \beta(t)}{(t+1)^2} dt$. La fonction $t \mapsto \frac{\cos^2 \beta(t)}{(t+1)^2}$

est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta(x) + x) = \beta(0) + \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 \beta(t)}{(t+1)^2} dt$.

IV.D. On a $g'g'' + \left(1 - \frac{3}{4(t+1)^2}\right)gg' = 0$. Or, $\rho^2 = g^2 + g'^2$ d'où, en dérivant, $\rho\rho' = gg' + g'g''$.

En combinant ces deux équations, on obtient $\rho\rho' - \frac{3}{4(t+1)^2}gg' = 0$ et, après simplification par ρ ,

$$\rho' - \frac{3 \cos \beta(t) \sin \beta(t)}{4(t+1)^2} \rho = 0.$$

On intègre : $\rho(t) = \rho(0) \exp\left(\frac{3}{4} \int_0^t \frac{\cos \beta(u) \sin \beta(u)}{4(u+1)^2} du\right)$. L'intégrande étant manifestement une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ , on déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = a = \rho(0) \exp\left(\frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta(u) \sin \beta(u)}{4(u+1)^2} du\right) > 0.$$

IV.E. Posons $\rho(t) = a + \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$, et $\beta(t) = -t - b - \eta(t)$ avec $b = -\lim_{t \rightarrow +\infty} (\beta(t) + t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0$. Alors $f(t) = \sqrt{t+1} \rho(t) \cos \beta(t) = \sqrt{t+1} (a + \varepsilon(t)) \cos(t + b + \eta(t))$.

Or, $\sqrt{t+1} = \sqrt{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{t} + \xi(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi(t) = 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \cos(t + b + \eta(t)) &= \cos(t + b) \cos \eta(t) - \sin(t + b) \sin \eta(t) \\ &= \cos(t + b) (1 + o(1)) + o(1) \\ &= \cos(t + b) + \omega(t), \end{aligned}$$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = 0$. Finalement,

$$f(t) = (\sqrt{t} + \xi(t)) (a + \varepsilon(t)) (\cos(t + b) + \omega(t)) = a \sqrt{t} \cos(t + b) + o(\sqrt{t}).$$

IV.F.

Partie V : Étude de la stabilité pour $\alpha = 1$

V.A. Aucune des solutions f non nulles de $(E_{1,0})$ n'est bornée : on vérifie par exemple que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(2k\pi - b) = +\infty$. Cela contredit manifestement la stabilité par rapport aux conditions initiales. Par ailleurs, si $\beta \in]1, +\infty[$, on a vu que toute solution g de $(E_{\beta,0})$ est bornée sur \mathbb{R}_+ , donc $f - g$ ne peut pas être bornée, cela contredit aussi la stabilité par rapport au paramètre pour l'équation $(E_{1,0})$.

V.B. On a $(f_\lambda(0), f'_\lambda(0)) = (0, 0)$. Posons $h(x) = f''_\lambda(x) - \frac{f'_\lambda(x)}{1+x} + f_\lambda(x)$. On calcule :

$$h(x) = 2\lambda \cos x - \frac{\lambda}{1+x} (\sin x + x \cos x). \text{ On obtient facilement la majoration } \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |h(x)| \leq 4|\lambda|, \text{ donc } h \in B \text{ et } \|h\|_\infty \leq 4|\lambda| \text{ alors que } f_\lambda \notin B.$$

Donc, pour tout $\eta > 0$, on peut trouver $h \in B$ telle que $\|h\|_\infty \leq \eta$ et telle que la solution f de $(E_{1,0})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0, 0)$ ne soit pas bornée. L'équation $(E_{1,0})$ n'est donc pas stable par rapport au second membre au sens ∞ .