

I-Les équations de Cauchy-Riemann**I-A I-A-1) Expressions demandées**

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)). \end{aligned}$$

I-A-2) Montrons les égalités demandées

- On obtient les mêmes expressions précédentes pour g , en remplaçant dans ces expressions f par g .
 · Les équations de Cauchy-Riemann introduites dans les expressions de $I - A - 1$, entraînent que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta). \\ \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \\ &= -\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta). \end{aligned}$$

I-B I-B-1) Valeurs de α tel que $\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n$

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, φ_α est de classe C^∞ et on a
 $\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n \iff \forall t > 0, \alpha(\alpha - 1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - n^2 t^\alpha = 0 \iff \alpha^2 - n^2 = 0 \iff \alpha = \pm n$.

I-B-2) Solutions de $\mathcal{E}_n$

- Si $n = 0$.
 Soit $f \in \mathcal{E}_0$, alors $\forall t > 0, t^2 f''(t) + t f'(t) = 0$, donc $\forall t > 0, t f''(t) + f'(t) = (t f'(t))' = 0$, ce qui entraîne que $\forall t > 0, f'(t) = \frac{\alpha_0}{t}$ où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et par suite $\forall t > 0, f(t) = \alpha_0 \ln(t) + \beta_0$ où $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$.
 Réciproquement, on vérifie bien que ses fonctions sont solutions de $\mathcal{E}_0$.
 · Si $n \neq 0$
 On vient de montrer dans la question précédente que la famille $(t \mapsto t^n, t \mapsto t^{-n})$ est un système fondamental de solutions de $\mathcal{E}_n$, donc les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont de la forme $t \mapsto \alpha_n t^n + \beta_n t^{-n}$ où $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$.

I-C I-C-1) $c_{n,f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

f étant de classe C^1 , donc la fonction $(r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) e^{-in\theta}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (de Leibniz), $c_{n,f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall r > 0, c'_{n,f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

or les fonctions $\theta \mapsto \tilde{g}(r, \theta)$ et $\theta \mapsto e^{-in\theta}$ sont de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, donc une intégration par parties est permise et on obtient

$$\forall r > 0, (c_{n,f})'(r) = [\tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{in}{r} c_{n,g}(r).$$

I-C-2) Montrons que $c_{n,f} \in \mathcal{E}_n$ et qu'elle est bornée au voisinage de 0

- Un raisonnement analogue au précédent conduit à que, $c_{n,g}$ est de classe C^1 , et

$$\forall r > 0, (c_{n,g})'(r) = -\frac{in}{r} c_{n,f}(r), \text{ donc } c_{n,f} \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et}$$

$$\forall t > 0, (c_{n,f})''(r) = \left(\frac{in}{r} c_{n,g}(r)\right)' = -\frac{in}{r^2} c_{n,g}(r) - \left(\frac{in}{r}\right)^2 c_{n,f}(r) = -\frac{1}{r} (c_{n,f}(r))' + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r)$$

ce qui entraîne que $\forall r > 0, r^2 (c_{n,f})'' + r (c_{n,f})' - n^2 c_{n,f} = 0$.

- f étant continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $\lim_{r \rightarrow 0^+} \tilde{f}(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = f(0, 0)$, et par suite

$r \mapsto \tilde{f}(r, \theta)$ est bornée au voisinage de 0, c'est à dire $\exists \eta, M > 0$ tel que $\forall r \in]0, \eta[, |\tilde{f}(r, \theta)| \leq M$ ce qui entraîne que $\forall r \in]0, \eta[, |c_{n,f}(r)| \leq M$.

- $c_{n,f}$ est solution de $\mathcal{E}_n$, donc $\forall r > 0, c_{n,f}(r) = \begin{cases} \alpha_0 \ln(r) + \beta_0 & \text{si } n = 0 \\ \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$, or $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0, donc $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_n = 0$ si $n < 0$ et $\beta_n = 0$ si $n > 0$, ce qui entraîne que $\forall r > 0, c_{n,f}(r) = \beta_0 r^0$ ou $c_{n,f}(r) = \beta_n r^{-n} = \beta_n r^{|n|}$ si $n < 0$ et $c_{n,f}(r) = \alpha_n r^n = \alpha_n r^{|n|}$ si $n > 0$ d'où l'existence de $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $\forall r > 0, c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$.

I-C-3) Théorème de Dirichlet et égalité demandée

. Théorème de Dirichlet : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π -périodique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée de f , à savoir $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
 . $\forall r > 0$, La fonction $\theta \mapsto \tilde{f}(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est de classe C^1 , 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, de coefficients de Fourier $c_{n,f}(r)$, donc d'après le théorème de Dirichlet

$$\forall r > 0, \forall \theta \in \mathbb{R}, \tilde{f}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,f}(r) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

I-D I-D-1) Les fonctions $c_{n,f}$ sont bornées

Soit $M > 0$ un majorant de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, alors

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) \right| = \left| \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right| \leq 2M$$

$$\text{or } \forall r > 0, (c_{n,f}(r))' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta, \text{ donc } \forall r > 0, |(c_{n,f}(r))'| \leq 2M.$$

I-D-2) Montrons que les dérivées partielles de f sont bornées

D'après I - C - 2) $\forall r > 0, c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}$, donc $\forall r > 0, (c_{n,f}(r))' = |n| a_n r^{|n|-1}$, donc

$$\forall n \neq 0, r > 0, |a_n| \leq \frac{2M}{nr^{|n|-1}}, \text{ ce qui entraîne en tendant } r \text{ vers } +\infty, \text{ que } a_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ tel que}$$

$$|n| \geq 2, \text{ et par suite } \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \tilde{f}(r, \theta) = a_{-1} r e^{-i\theta} + a_0 + a_1 r e^{i\theta}, \text{ donc } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta) = a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}$$

$$\text{et } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta) = ir(-a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}), \text{ Ce qui conduit à}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = \cos(\theta)(a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}) - i \sin(\theta)(-a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}) = a_{-1} + a_1.$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \sin(\theta) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = i \cos(\theta)(-a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}) + \sin(\theta)(a_{-1} e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}) = -i(a_{-1} + a_1).$$

II-Quelques solutions de (1)

II-A . Soit $\varphi : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ une fonction de $\mathcal{P}_2$.

Un calcul simple amène à φ vérifie (1) $\iff (2a)(2c) - (b)^2 = 1 \iff 4ac - b^2 = 1$.

II-B Existence d'une solution du problème de Cauchy

. Théorème de Cauchy : Soit $(t_0, u_0) \in \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe C^1 sur Ω , alors le problème de Cauchy $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et toute autre solution est une restriction de cette solution.

. On considère l'application $f : (x, y) \mapsto -\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{y} - y \right)$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^*)^2$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\forall (t_0, u_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$ l'équation (II - 1) admet une solution u de classe C^1 sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et vérifiant $u(t_0) = u_0$.

II-C L'équation (II - 1) n'admet aucune solution polynômiale

Soit φ une telle solution, alors $\forall t \in J, \varphi(t)(\varphi(t) + 2t\varphi'(t)) = -1$ et par passage au degré, on obtient $2\deg(\varphi) = 0$, donc φ est une constante $C \in \mathbb{R}$, ce qui conduit en introduisant φ dans l'équation (II - 1) à la contradiction $C^2 = -1$.

II-D II-D-1) Montrons que $\Omega(J)$ est un ouvert non vide

. J étant non vide, soit $x_0 \in J$, alors $(x_0, 1) \in \Omega(J)$.

. On considère l'application $\varphi : (x, y) \mapsto xy$, alors φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$(x, y) \in \Omega(J) \iff \varphi(x, y) \in J \iff (x, y \in \varphi^{-1}(J))$, donc $\Omega(J) = \varphi^{-1}(J)$, donc $\Omega(J)$ c'est un ouvert comme image réciproque de l'ouvert J par l'application continue φ .

II-D-2) . W est de classe C^2 comme composée de l'application polynômiale $(x, y) \mapsto xy$ et de w toutes les deux de classe C^1 .

. Les dérivées partielles secondes de W sont $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = y^2 \omega''(xy)$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^2 \omega''(xy)$ et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \omega'(xy) + xy \omega''(xy), \text{ donc on les équivalences}$$

$$W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff \forall (x, y) \in \Omega(J), (y^2 \omega''(xy))(x^2 \omega''(xy)) - (\omega'(xy) + xy \omega''(xy))^2 = 1 \iff \\ \forall t \in J, t^2 \omega''(t) - (\omega'(t) + t \omega''(t))^2 = -\omega'(t)(\omega'(t) + 2t \omega''(t)) = 1 \iff \omega' \text{ vérifie (II - 1) sur } J.$$

II-D-3) Montrons que $W \in \mathcal{P}_1$ ssi ω est affine

- Soit $W : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ une restriction à $\Omega(J)$, alors $\forall t \in J, x \in \mathbb{R}^*$, $(t, 1), (tx, \frac{1}{x}) \in \Omega(J)$, donc $\omega(t) = at^2 + (b+d)t + c + e + f = at^2x^2 + bt + \frac{c}{x^2} + dtx + \frac{e}{x} + f$ et par suite $\forall t \in J, x \in \mathbb{R}^*$, $at^2x^4 + dtx^3 - (at^2 + dt + c + e)x^2 + ex + c = 0$, d'où le système $\forall t \in J$, $at^2 = dt = at^2 + dt + c + e = e = c = 0$, puis $a = d = c = e = 0$, ce qui entraîne que $\forall t \in J$, $\omega(t) = bt + f$.
- Réciproquement, si $\omega(t) = bt + f$, alors $\forall (x, y) \in \Omega(J)$, $W(x, y) = \omega(xy) = bxy + f$, donc W est une restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction polynômiale.

II-E Montrons que si f est solution de (1), alors $f_{a,b}$ l'est aussi

$$\forall (x, y) \in \Omega_{a,b}, \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - a, y - b), \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x - a, y - b) \text{ et}$$

$$\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a, y - b), \text{ donc } f \text{ vérifie (1) sur } \Omega \text{ si, et seulement si } f_{a,b} \text{ vérifie (1) sur } \Omega_{a,b}.$$

II-F Les solutions de (1) non polynômiales sont en nombre infini

- Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$, alors d'après (II-B), il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ tel que u est solution de l'équation (II-1) sur I .
- Soit ω une primitive (il y en a une infinité), de u sur I , alors $\omega' = u$ est solution de (II-1) sur I , donc d'après (II-D-2) la fonction $W : (x, y) \mapsto \omega(xy)$ est solution de (1) dans l'ouvert $\Omega(I)$ qui contient $(t_0, 1)$ (car $t_0 \in I$).
- Soit $U = \Omega_{x_0-t_0, y_0-1}$ l'image de $\Omega(I)$ par la translation de vecteur $(x_0 - t_0, y_0 - 1)$, alors U contient (x_0, y_0) et d'après (II-E), $W_{x_0-t_0, y_0-1} : (x, y) \mapsto W(x - x_0 + t_0, y - y_0 + 1)$ est solution de (1) dans U .
- Si $W_{x_0-t_0, y_0-1}$ coïncide sur U avec un élément de $\mathcal{P}_2$, alors d'après la question (II-D-3), $t \mapsto \omega(t - x_0 + t_0)$ est affine, donc aussi pour ω et par suite $u = \omega'$ est constante solution de (II-1), ce qui est absurde d'après la question (II-C).
- En conclusion, les solutions $W_{x_0-t_0, y_0-1}$ sont en nombre infini et ne coïncident avec aucun élément de $\mathcal{P}_2$.

III-Un critère de difféomorphisme

III-A Définition et caractérisation d'un C^1 -difféomorphisme

- Définition : on dit que f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, f est bijective et f, f^{-1} sont de classe C^1 .
- Une caractérisation : Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 , bijective dont le jacobien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, alors f est un C^1 -difféomorphisme.

III-B III-B-1) Vérification de l'égalité

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto F(p + t(q - p))$, alors φ est de classe C^1 comme composée de $t \mapsto p + t(q - p)$ et F qui sont de classe C^1 et on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = dF_{p+t(q-p)}(q - p)$ et par suite $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$, ce qui s'écrit aussi $F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p) dt$.

III-B-2) Montrons l'inégalité demandée

On considère la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, $L : x \mapsto \langle x, q - p \rangle$, alors

$$L \left(\int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p) dt \right) = \int_0^1 L(dF_{p+t(q-p)}(q - p)) dt, \text{ c'est à dire}$$

$$\left\langle \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q - p) dt, q - p \right\rangle = \int_0^1 \langle dF_{p+t(q-p)}(q - p) \rangle dt, \text{ donc}$$

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle = \int_0^1 \langle dF_{p+t(q-p)}(q - p), q - p \rangle dt \geq \int_0^1 \alpha \|q - p\|^2 dt = \alpha \|q - p\|^2.$$

III-C III-C-1) Calcul de $dG_p^a(h)$

Soient les deux applications $H : x \mapsto \|x\|^2$, $K : p \mapsto F(p) - a$, alors H et K sont de classe C^1 et par suite $G^a = H \circ K$ est de classe C^1 et on a $\forall p, h \in \mathbb{R}^2$, $dG_p^a(h) = dH_{K(p)}(dK_p(h)) = dH_{K(p)}(dF_p(h)) = 2 \langle dF_p(h), K(p) \rangle = 2 \langle dF_p(h), F(p) - a \rangle$.

III-C-2) Limite de $G^a(p)$ à l'infini

$\forall p \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \|p\|^2 \leq \langle F(p) - F(0), p \rangle \leq \|F(p) - F(0)\| \cdot \|p\|$, donc $\forall p \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|p\| \geq 1$, $\alpha \|p\| \leq \|F(p) - F(0)\| \leq \|F(p) - a\| + \|a - F(0)\|$, ce qui entraîne que $\lim_{\|p\| \rightarrow +\infty} \|F(p) - a\| = +\infty$.

III-C-3) G^a atteint un minimum

• $G^a(p)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|p\|$ tend vers $+\infty$, donc $\exists R > 0$ tel que $\forall \|p\| > R$, $G^a(p) \geq G^a(0)$.

. $\overline{B}(0, R)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et $p \mapsto G^a(p)$ est continue sur $\overline{B}(0, R)$, donc G^a est bornée et atteint sa borne inférieure sur $\overline{B}(0, R)$ en un point p_0 , donc $\forall p \in \overline{B}(0, R), G^a(p) \geq G^a(p_0)$ et $\forall p \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|p\| > R, G^a(p) \geq G^a(0) \geq G^a(p_0)$, ce qui entraîne que $\forall p \in \mathbb{R}^2, G^a(p) \geq G^a(p_0)$, c'est à dire G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ au point p_0 .

III-C-4) Montrons que $F(p_0) = a$

. G^a admet un minimum en p_0 sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert, donc $dG^a_{p_0} = 0$, c'est à dire $\forall h \in \mathbb{R}^2, \langle dF_{p_0}(h), F(p_0) - a \rangle = 0$, en particulier pour $h = F(p_0) - a$, on obtient $\alpha \|F(p_0) - a\|^2 \leq \langle dF_{p_0}(F(p_0) - a), F(p_0) - a \rangle = 0$, ce qui entraîne que $F(p_0) = a$.

III-D Montrons que F est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

. F étant de classe C^1 , F surjective par la question (III - C).
 . Soient $p, q \in \mathbb{R}^2$ tels que $F(p) = F(q)$, alors l'inégalité de (III - B - 2) entraîne que $\alpha \|q - p\|^2 \leq \langle F(q) - F(p), q - p \rangle = 0$, donc $p = q$ et par suite F est injective.
 . Soit $p \in \mathbb{R}^2$ et $h \in \text{Ker}(dF_p)$, alors $\alpha \|h\|^2 \leq \langle dF_p(h), h \rangle = 0$, donc $h = 0$ et par suite dF_p est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On conclut que F est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV-Le théorème de Jörgens

IV-A F est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

. f étant de classe C^2 , donc u et v sont de classe C^1 , et par suite F est de classe C^1 comme application à composantes de classe C^1 .

. $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et puisque f est de classe C^2 , le théorème de Schwarz entraîne $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

. La matrice de $JacF(x, y) - I_2$ est $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$, donc elle est symétrique.

Soient λ_1, λ_2 ses valeurs propres.

. f vérifie (1), donc $\det(J) = \lambda_1 \lambda_2 = 1$ et par suite λ_1, λ_2 sont de même signe.

. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$, donc $\text{tr}(J) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et par suite les valeurs propres de J sont positives, ce qui la rend positive.

. La positivité de la matrice J entraîne que $\forall p, h \in \mathbb{R}^2, \langle (dF_p - id_{\mathbb{R}^2})(h), h \rangle \geq 0$, donc $\langle dF_p(h), h \rangle \geq \langle h, h \rangle = \|h\|^2$, et la partie (III) avec $\alpha = 1$, entraîne que F est un C^1 -difféomorphisme.

IV-B IV-B-1) Existence de φ et ψ

. Soient les applications $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $g(x, y) = x - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $h(x, y) = -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, alors

la classe C^2 de f entraîne que g et h sont de classe C^1 .

F étant un C^1 -difféomorphisme, donc F^{-1} est de classe C^1 et par suite $\varphi = g \circ F^{-1}$ et $\psi = h \circ F^{-1}$ sont de classe C^1 comme composées d'applications de classe C^1 , et ses applications répondent à la question.

IV-B-2) Calcul des dérivées partielles

. L'égalité $\varphi \circ F = g$ entraîne que $Jac\varphi(u, v).JacF(x, y) = Jacg(x, y)$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix} = (1-r, -s), \text{ d'où } \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{2+t+r} (1-r, -s) \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}, \text{ ce qui conduit à } \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{t-r}{2+t+r} \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-2s}{2+t+r}.$$

. Un calcul analogue amène à $\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{2+t+r} (s, -1+t) \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$, donc $\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{2s}{2+t+r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{t-r}{2+t+r}$.

IV-B-3) Les dérivées partielles de φ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$

. On rappelle que $r, t > 0$ et $rt - s^2 = 1$.

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| = \left| \frac{t-r}{2+t+r} \right| \leq \left| \frac{t+r}{2+t+r} \right| < 1.$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|^2 = \frac{4s^2}{(2+t+r)^2} = \frac{4rt-4}{(2+t+r)^2} \leq \frac{4r}{(t+r)^2} \leq 1, \text{ donc } \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \leq 1.$$

IV-B-4) Les dérivées partielles de φ sont constantes

φ et ψ sont de classe C^1 , donc d'après la question (I - D), $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV-B-5) Montrons que r, s et t sont constantes

En dérivant les égalités $\varphi \circ F = g$ et $\psi \circ F = h$ par rapport à x , on obtient le système

$$\begin{cases} r(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}) + s \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ -r \frac{\partial \varphi}{\partial v} + s(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - 1) = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases}, \text{ de discriminant } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 1 \end{vmatrix} = (\frac{\partial \varphi}{\partial u})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial v})^2 - 1 =$$
$$-\frac{4}{t+r+2} < 0, \text{ donc } r, s \text{ sont des constantes et par suite } t = \frac{1+s^2}{r} \text{ est aussi constante.}$$

IV-C Les seules fonctions solutions de (1) appartiennent à $\mathcal{P}_2$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1).

. on a $r \neq 0$, si non on aura $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -1$ et quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $r > 0$,

donc d'après la partie (IV), r, s et t sont constantes.

. r étant constante, donc $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x, y) = ax^2 + xg(y) + h(y)$ où $g, h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, or $s = g'(y)$ est constante, donc $g(y) = by + c$, ce qui donne $f(x, y) = ax^2 + bxy + cx + h(y)$ et puisque $t = h''(y)$ est constante, alors $h(y) = dy^2 + ey + f$, ce qui donne enfin $f(x, y) = ax^2 + bxy + dy^2 + cx + ey + f$ avec la condition $4ad - b^2 = 1$.