

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 3 pages.

- - - - -

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

I

I-1) Soit \mathcal{A} un anneau unitaire, $1_{\mathcal{A}}$ l'unité de \mathcal{A} .

Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ formé par les éléments inversibles de \mathcal{A} est une partie stable pour la multiplication définie sur \mathcal{A} et que la multiplication induite confère à $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ une structure de groupe.

I-2) Soit \mathcal{A}_1 un sous anneau de \mathcal{A} contenant $1_{\mathcal{A}}$. Montrer que \mathcal{A}_1 est unitaire et que l'on a : $\mathcal{U}_{\mathcal{A}_1} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}_1$

I-3) Montrer que $\mathbb{Z}[x]$ et $\mathbb{Q}[x]$ sont des sous anneaux unitaires de l'anneau $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à une indéterminée construite sur \mathbb{R} . Déterminer

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}[x]}, \mathcal{U}_{\mathbb{Q}[x]}, \mathcal{U}_{\mathbb{R}[x]} \cap \mathbb{Z}[x] \text{ et } \mathcal{U}_{\mathbb{R}[x]} \cap \mathbb{Q}[x]$$

- - - - -

II

K désigne un corps commutatif. Sa caractéristique n'est pas 2. Son unité est notée 1. On pourra noter 2 l'élément $1 + 1$.

a, b, c désignent 3 éléments donnés de K , non tous nuls. On pourra poser $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma$
 $\mathcal{M}(3, K)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, à éléments dans K .

E désigne la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; P désigne la matrice $\begin{bmatrix} -c^2 & bc & -ac \\ bc & -b^2 & ab \\ -ac & ab & -a^2 \end{bmatrix}$

II-1) Soit n un naturel. Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice P . Indiquer si la matrice P est régulière.

II-2) On désigne par $[E, P]$ l'ensemble des matrices qui sont combinaisons linéaires de E

et de P : $[E, P] = \{M \in \mathcal{M}(3, K) \mid \exists (\lambda, \mu) \in K^2, M = \lambda E + \mu P\}$

On sait que $[E, P]$ est un sous espace vectoriel du K , espace vectoriel construit sur $\mathcal{M}(3, K)$. Quelle est la dimension de ce sous espace vectoriel ?

Montrer que $[E, P]$ est un sous anneau unitaire de l'anneau $(\mathcal{M}(3, K), +, \times)$.

L'anneau $([E, P], +, \times)$ est-il commutatif ?

II-3) Déterminer : $\mathcal{U}_{[E, P]}$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{M}(3, K)} \cap [E, P]$

II-4) Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de la matrice $\lambda E + \mu P$

On supposera $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, on pourra supposer que $K = \mathbb{C}$.

II-5) Soit T la matrice $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$. On désigne par $[E, P, T]$ l'ensemble des matrices qui

.../...

sont combinaisons linéaires de E, P et T. Déterminer $\dim [E, P, T]$

Montrer que $[E, F, T]$ est un sous anneau commutatif unitaire de $(\mathcal{M}(3, K), +, \cdot)$

Déterminer $\mathcal{U}_{[E, P, T]}$ et $\mathcal{U}_{\mathcal{M}(3, K)} \cap [E, P, T]$

II-6) On suppose que l'on a : $(\lambda - \mu(a^2 + b^2 + c^2)) (\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$. Montrer que les matrices $(\lambda E + \mu P + T) (\lambda E + \mu P - T)^{-1}$ et $(\lambda E + \mu P - T) (\lambda E + \mu P + T)^{-1}$ sont orthogonales droites.

Indiquer les valeurs des éléments de ces matrices

II-7) Soit $S = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \phi \\ \epsilon & \phi & \gamma \end{bmatrix}$ une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}(3, K)$

Montrer que, pour que l'on ait $ST = TS$, il faut et il suffit que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi)$ soit solution du système :

$$\begin{cases} a\delta + b\epsilon = 0 \\ a\delta - c\phi = 0 \\ b\epsilon + c\phi = 0 \\ -a\alpha + a\beta + c\epsilon + b\phi = 0 \\ b\alpha - b\gamma + c\delta - a\phi = 0 \\ c\beta - c\gamma + b\delta + a\epsilon = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système et en déduire la forme générale des matrices S

(On pourra distinguer 4 cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$
 $a \neq 0$ et $b = 0$
 $a = 0$ et $b \neq 0$
 $a = 0$ et $b = 0$)

II-8) Déterminer le rang de la matrice Σ définie par $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ -a & a & 0 & 0 & c & b \\ b & 0 & -b & c & 0 & -a \\ 0 & c & -c & b & a & 0 \end{pmatrix}$

II 9) Soit $\Theta = \begin{bmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{bmatrix}$ une matrice antisymétrique appartenant à $\mathcal{M}(3, K)$

Déterminer A, B, C pour que l'on ait $\Theta T = T \Theta$

En déduire la forme générale des matrices M appartenant à $\mathcal{M}(3, K)$ qui commutent avec T.

III

\mathcal{E} désigne un espace vectoriel euclidien.

Le produit scalaire de 2 vecteurs X et Y de \mathcal{E} est noté $X \cdot Y$

III-1) Soit f et g deux applications de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . On suppose que l'on a :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{E}^2, f(X) \cdot Y = X \cdot g(Y)$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de \mathcal{E} .

III-2) Soit f un endomorphisme de \mathcal{E} . Montrer que l'ensemble $A(f)$ des endomorphismes g de \mathcal{E} vérifiant : $\forall (X, Y) \in \mathcal{E}^2, f(X) \cdot Y = X \cdot g(Y)$ a au plus un élément. Déterminer $A(\text{Id})$ et $A(0)$, Id et 0 désignant respectivement les endomorphismes de \mathcal{E} définis par :

$$\text{Id}(X) = X \quad 0(X) = 0$$

.../...

III-3) Lorsque $A(f)$ n'est pas vide, on désigne par f^* son unique élément. Montrer qu'alors $A(f^*)$ n'est pas vide et déterminer f^{**} .

Soit f et g deux endomorphismes de E , a et b des réels. Montrer que si $A(f)$ et $A(g)$ sont tous deux non vides, $A(af + bg)$ et $A(g \circ f)$ sont non vides et déterminer $(af + bg)^*$ et $(g \circ f)^*$

III-4) Soit f un endomorphisme de E . On suppose $A(f)$ non vide.

a) montrer que si f est surjectif, f^* est injectif

b) on suppose que f est bijectif et que $A(f^{-1})$ n'est pas vide. Montrer que f^* est

bijectif.

III-5) On désigne par \mathcal{A} l'ensemble des endomorphismes f de E pour lesquels $A(f)$ est non vide, par \mathcal{S} l'ensemble des éléments f de \mathcal{A} vérifiant $f^* = f$, enfin par \mathcal{T} l'ensemble des éléments f de \mathcal{A} vérifiant $f^* = -f$

a) montrer que $\mathcal{A}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ sont des sous espaces vectoriels de l'espace vectoriel construit sur l'ensemble $\text{End } E$ des endomorphismes de E et que \mathcal{A} est somme directe de \mathcal{S} et \mathcal{T} . f étant un élément de \mathcal{A} , on désigne désormais par $s(f)$ l'unique élément de \mathcal{S} et par $t(f)$ l'unique élément de \mathcal{T} vérifiant $f = s(f) + t(f)$

b) soit σ un élément de \mathcal{S} , τ un élément de \mathcal{T} . Montrer que pour qu'un élément f de \mathcal{A} commute avec σ (ou avec τ) il faut et il suffit que $s(f)$ et $t(f)$ commutent avec σ (ou avec τ)

c) montrer que $(\mathcal{A}, +, \circ)$ est un anneau unitaire. En est-il de même de $(\mathcal{S}, +, \circ)$ et de $(\mathcal{T}, +, \circ)$?

III-6) On désigne par \mathcal{C} l'ensemble des éléments f de \mathcal{A} vérifiant $s(f) \circ t(f) = t(f) \circ s(f)$

Soient X et Y deux vecteurs de E , f un élément de \mathcal{C} . Calculer

$$s(f)(X) \cdot t(f)(Y) + t(f)(X) \cdot s(f)(Y)$$

$$f(X) \cdot f(Y) - f^*(X) \cdot f^*(Y)$$

III-7) Soit f un élément de \mathcal{A} . Montrer que l'on a

$$f \in \mathcal{C} \iff f \circ f^* = f^* \circ f$$

III-8) Soit f un élément de \mathcal{C} . Montrer que si l'un des endomorphismes $s(f)$ ou $t(f)$ est injectif, il en est de même de f et de f^* .

III-9) Soit f un automorphisme de E appartenant à \mathcal{C} . On désigne par g l'endomorphisme $f^* \circ f^{-1}$. X et Y désignant deux vecteurs de E , calculer $g(X) \cdot g(Y) - X \cdot Y$

III-10) Soit f un automorphisme de E appartenant à \mathcal{C} .

On suppose que E est de dimension finie

On désigne par (U_1, U_2, \dots, U_n) une base orthonormée de E

On pose $A_i = f(U_i)$ pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$A_i^* = f^*(U_i)$ pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

On désigne par S la matrice de $s(f)$ et par T la matrice de $t(f)$ lorsqu'on rapporte E à la base (U_1, U_2, \dots, U_n)

Déterminer les matrices de $s(f)$ et de $t(f)$ lorsqu'on rapporte E à la base (A_1, A_2, \dots, A_n) (ou à la base $(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$)

Déterminer la matrice de f lorsqu'on rapporte E à la base $(A_1^*, A_2^*, \dots, A_n^*)$