Proposition de correction du sujet maths A 2023

Exercice 1.

1.1 On a

$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X+1&2&-4\\0&X+1&-2\\2&2&X-5\end{vmatrix}\overset{C_2\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}X+1&X-1&-4\\0&X-1&-2\\2&X-1&X-5\end{vmatrix}$$
$$=(X-1)\begin{vmatrix}X+1&1&-4\\0&1&-2\\2&1&X-5\end{vmatrix}\overset{C_3\leftarrow C_3+2C_2}{=}(X-1)\begin{vmatrix}X+1&1&-2\\0&1&0\\2&1&X-3\end{vmatrix}$$
$$=(X-1)\begin{vmatrix}X+1&-2\\2&X-3\end{vmatrix}=(X-1)(X^2-2X+2)=(X-1)^3$$

On en déduit $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{1\}\ \text{ et }\ m(1)=3}$.

1.2 Si A était diagonalisable, comme 1 est sa seule valeur propre, il existerait une matrice inversible P telle que $A=PI_3P^{-1}=I_3$ ce qui est une contradiction. Ainsi $\boxed{A\text{ n'est pas diagonalisable}}$.

1.3 On a $\mathrm{I}_3-A=\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&2&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}$. On a alors $\mathrm{rg}(\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3)=\mathrm{rg}(C_1,C_2)=2$ car $C_1+C_2+C_3=0$ et car C_1,C_2 ne sont visiblement pas colinéaires.
La formule du rang donne alors $\dim\mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}_3-A)=1$, de quoi on déduit $\boxed{E_1=\mathrm{Ker}\,(\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{Vect}(1,1,1)}$.

1.4 On a

$$(A-\mathrm{I}_3)X=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-x&-y&+2z&=1\\&-y&+z&=1\\-x&-y&+2z&=1\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x&=&1&+y\\z&=&1&+y\end{cases}\iff X=\begin{pmatrix}1+y\\y\\1+y\end{pmatrix}$$

D'où le résultat : $\boxed{(A-\mathrm{I}_3)X=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\iff\exists y\in\mathbb{R},\ X=\begin{pmatrix}1+y\\y\\1+y\end{pmatrix}}$.

1.5 On a déjà $f(e_1)=e_1\iff e_1\in E_1$ donc on prend $\boxed{e_1=(1,1,1)}$.
Ensuite, on a $f(e_2)=2e_1+e_2\iff(f-\mathrm{Id})(e_2)=(2,2,2)$, donc on prend pour e_2 un vecteur de la forme $(1+y,y,1+y)$. On peut par exemple choisir (arbitrairement) $y=0$ ce qui donne $\boxed{e_2=(1,0,1)}$.
Enfin, on a $f(e_3)=-2e_2+e_3\iff(f-\mathrm{Id})(e_3)=(-2,0,-2)$. On résoud alors le système associé :

$$(A-\mathrm{I}_3)X=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-x&-y&+2z&=-1\\&-y&+z&=0\\-x&-y&+2z&=-1\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x&=&1&+y\\z&=&&y\end{cases}$$

On prend alors arbitrairement $y=0$, ce qui donne $\boxed{e_3=(1,0,0)}$.

1.6 Par théorème, deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Il s'agit donc de trouver une base $\mathcal{B}=(u,v,w)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$.
Cela équivaut à dire que l'on a $f(u)=u,\ f(v)=2u+v,$ et $f(w)=-2v+w$.
Il suffit donc de montrer que e_1,e_2,e_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, et alors cette base conviendra.
Or on a $\det(e_1,e_2,e_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1\neq0$ ce qui prouve le résultat : il suffit de prendre pour P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

Finalement, $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\text{ convient.}}$

2.1 On note $E_{i,j}$ la matrice de taille 3 dont tous les termes valent 0, sauf le terme d'indice (i,j) qui vaut 1. On peut alors écrire pour toute matrice N :

$$N\in\mathcal{N}\iff\exists a,b,c\in\mathbb{R}^3,\ N=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}=aE_{1,2}+bE_{1,3}+cE_{2,3}.$$

Cela prouve $\mathcal{N}=\mathrm{Vect}\left(E_{1,2},E_{1,3},E_{2,3}\right)$, de quoi on déduit immédiatement que $\boxed{\mathcal{N}\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$
De plus la famille $\left(E_{1,2},E_{1,3},E_{2,3}\right)$ génère $\mathcal{N}$ et comme elle est libre (en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), on en déduit que c'est une base de $\boxed{\mathcal{N}\text{ qui est donc de dimension 3.}}$

2.2 Il suffit de constater que $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$ pour avoir le résultat : $\boxed{\mathcal{N} \text{ est stable par produit}}$.

2.3 Après calculs on obtient $\boxed{N^3 = 0}$.

3.1 Les matrices de $\mathcal{U}$ ont toutes des coefficients diagonaux égaux à 1, donc $O_3 \notin \mathcal{U}$ ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

3.2 Il suffit de calculer $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & b'+ac'+b \\ 0 & 1 & c'+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$ pour avoir le résultat : $\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit}}$.

3.3 Les matrices $U \in \mathcal{U}$ sont triangulaires supérieures, donc leur déterminant est le produit de leurs termes diagonaux, soit $\det U = 1 \neq 0$ ce qui prouve que U est inversible. Ainsi $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$.

4.1 Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a directement $\boxed{B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & -2\alpha(\alpha-1) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

4.2 On a $N \in \mathcal{N}$, or $\mathcal{N}$ est stable par produit et par combinaison linéaire, donc on a $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$. Cela prouve $\boxed{U(\alpha) \in \mathcal{U}}$.

4.3 On a

$$\begin{aligned}
U^{(\alpha)}U^{(\beta)} &= \left(I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)\left(I + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N^2\right) \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \left(\alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\right)N^2 + (\cdots)\underbrace{N^3}_{O_3} + (\cdots)\underbrace{N^4}_{O_3} \\
&= I + (\alpha+\beta)N + \left(\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2}\right)N^2 \\
&= U^{(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Et par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} &= (\ \underbrace{I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2}_{N'}\ )^{(\beta)} \\
&= I + \beta N' + \frac{\beta(\beta-1)}{2}N'^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2}N^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2 \\
&= I + \alpha\beta N + \left(\frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{2}\right)N^2 + O_3 \\
&= I + \alpha\beta N + \frac{\beta\alpha}{2}\left(\alpha - 1 + \alpha(\beta-1)\right)N^2 = U^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}$$

Cela prouve $\boxed{U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \text{ et } \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}}$.

4.4 Il suffit de raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
En $n = 1$, on a $U^{(1)} = \mathrm{I}_3 + N = U$, donc on a bien $U^{(1)} = U^1$.
Pour l'hérédité, il suffit d'utiliser la propriété aux rang 1 et n, ce qui permet d'écrire : $U^{(n+1)} = U^{(n)}U^{(1)} = U^nU^1 = U^{n+1}$.
Par ailleurs le résultat reste vrai si $n = 0$, d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U^{(n)} = U^n}$.

4.5 Puisque $\mathrm{I}_3 N = N\mathrm{I}_3 = N$ la formule du binôme s'applique, et considérant que $N^k = O_3$ pour $k \geqslant 3$ on peut écrire pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
U^n = (\mathrm{I}_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{I}_3^{n-k}N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \mathrm{I}_3^{n-k}N^k + O_3 \\
&= I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = U^{(n)}
\end{aligned}$$

Cette démonstration nécessite a priori $n \geqslant 2$, mais si on prend la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, elle reste valable dans les cas $n = 0, 1$. On retrouve ainsi la formule $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U^{(n)} = U^n}$.

4.6 La question 4.3 permet d'écrire $UU^{(-1)} = U^{(1)}U^{(-1)} = U^{(1-1)} = U^{(0)} = \mathrm{I}_3$. Cela prouve $\boxed{U^{(-1)} = U^{-1}.}$

5.1 Comme $B \in \mathcal{U}$, en utilisant la question 4.3 on peut écrire : $B = B^{(1)} = \left(B^{(\frac{1}{2})}\right)^2$ donc $\boxed{C = B^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

5.2 On a $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1} = \left(PCP^{-1}\right)^2$ donc $\boxed{D = PCP^{-1} \text{ convient.}}$

Exercice 2.

1. T renvoie le rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc $\boxed{T \sim \mathcal{G}(p)}$.

2. Soit R_k l'évènement « le k-ème lancé est réussi. » On cherche alors à calculer la probabilité de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} R_k$. On écrit pour cela :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} R_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{R_k}\right) \\
&= 1 - \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\overline{R_k}\right) \quad \text{par continuité décroissante de } P \\
&= 1 - \lim_{N\to+\infty} (1-p)^N \text{ par indépendance des lancers} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'évènement « réussir au moins un panier » est quasi-certain.}}$

3.1 S_N compte le nombre de succès lors de la répétition de N épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p, donc $\boxed{S_N \sim \mathcal{B}(N, p)}$.

3.2 On a :

$$0 \leqslant \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \iff 0 \leqslant p^2 - 2 + \frac{1}{4} \iff p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Cela prouve $\boxed{p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}}$.

3.3 . Si X_k est la variable aléatoire égale à 1 si le k-ème lancer est réussi et 0 sinon, alors les X_k sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p. De plus on a $\frac{1}{N}S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$ et $E(X_k) = p$, ce qui permet d'appliquer la loi (faible) des grands nombres, et donne :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2},$$

avec $\sigma^2 = V(X_k) = p(1-p)$. On obtient alors le résultat en appliquant l'inégalité précédente : $\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}}$.

4.1 Si le joueur tire une pièce normale, alors le gain de l'organisateur est $n-1$. Et si le joueur tire la pièce noire, alors le gain de l'organisateur est $n - M$. Cela prouve $\boxed{G_n(\Omega) = \{n - M, n-1\}}$.

On en déduit également $\boxed{\mathbb{P}(G_n = n - M) = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbb{P}(G_n = n-1) = 1 - \frac{1}{n}}$.

4.2 On a $\boxed{E(G_n) = (n-M)\frac{1}{n} + (n-1)\frac{n-1}{n} = \frac{n - M + (n-1)^2}{n}}$.

5. On reconnait des séries entières de $\boxed{\text{rayon égal à 1}}$ en écrivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1-x) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$.

6.1 On a $\boxed{\mathbb{P}_{(T=n)}(A) = \frac{1}{n}}$ car il y a une seule pièce noire dans le sac et n pièces au total.

6.2 Le système $(T = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complet, donc la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(T=n)}(A)\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-1}p}{n} = -p\frac{1}{1-p}\ln(1-(1-p)) = \frac{p}{1-p}\ln\frac{1}{p}.$$

D'où le résultat : $\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$.

7.1 En utilisant la question 4.1 on voit que le gain de l'organisateur est soit $n-1$ soit $n - M$, avec n qui parcourt $\mathbb{N}^*$, soit finalement $\boxed{G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z};\ k \geqslant 1 - M\}}$.

7.2 Il suffit de reprendre les raisonnements de la question 4 : la loi de G conditionnellement à $T = n$ est la même que la loi de G_n. On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_{(T=n)}(G = k) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & \text{si } k = n-1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } k = n - M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

7.3 Le système $(T=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complet, donc la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(T=n)}(G=k)\mathbb{P}(T=n) \\ &= \mathbb{P}_{(T=k+1)}(G=k)\mathbb{P}(T=k+1) + \mathbb{P}_{(T=k+M)}(G=k)\mathbb{P}(T=k+M) + 0,\end{aligned}$$

où on a utilisé la question précédente.
Si $k \geqslant 0$, on en déduit (toujourd en utilisant 7.2) :

$$\mathbb{P}(G=k) = \frac{k}{k+1}(1-p)^k p + \frac{1}{k+M}(1-p)^{k+M-1}p.$$

Et si $k<0$ on a $\mathbb{P}(T=k+1)=0$, d'où dans ce cas

$$\mathbb{P}(G=k) = \frac{1}{k+M}(1-p)^{k+M-1}p.$$

D'où le résultat : $\boxed{\mathbb{P}(G=k) = \begin{cases} \frac{k}{k+1}pq^k + \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}}$.

8.1 On a :

$$\mathrm{E}(G_n)\,\mathbb{P}(T=n) = \frac{n-M+(n-1)^2}{n}(1-p)^{n-1}p \underset{n\to+\infty}{\sim} np(1-p)^{n-1}.$$

Or la question 5 prouve que $\sum_n np(1-p)^{n-1}$ converge, suite à quoi le théorème de comparaison donne le résultat : $\boxed{\text{la série de terme général } \mathrm{E}(G_n)\,\mathbb{P}(T=n) \text{ converge}}$.

8.2 En utilisant l'indication :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}(G_n)\,\mathbb{P}(T=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-M+(n-1)^2}{n}(1-p)^{n-1}p \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-n+1-M}{n}(1-p)^{n-1}p \\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}p + (1-M)p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^{n-1}}{n} \\ &= p\frac{1}{(1-(1-p))^2} - 1 + (1-M)\frac{p}{1-p}\ln\frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{p} - 1 + (M-1)\frac{p}{1-p}\ln(p)\end{aligned}$$

D'où le résultat $\boxed{\mathrm{E}(G) = \frac{1}{p} - 1 + (M-1)\frac{p}{1-p}\ln(p)}$.

9.1 On a

$$E(G) \geqslant 0 \iff \frac{1}{p} - 1 \geqslant (M-1)\frac{p}{1-p}\ln\frac{1}{p} \iff \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln\frac{1}{p}} \geqslant M-1.$$

D'où le résultat : $\boxed{\mathrm{E}(G) \geqslant 0 \iff \psi(p) \geqslant M-1}$.

9.2 Par lecture graphique il vient $\psi(0.3) \simeq 4.5$, donc $\boxed{\text{pour que le jeu soit rentable il faut prendre } M \leqslant 5.}$

9.3 Par lecture graphique, pour avoir $M=8$ et pour que le jeu rest rentable $\boxed{\text{il faut prendre } p \leqslant 0.24}$

9.4 Par lecture graphique, si $p \geqslant 0.58$ il vient que $\psi(p) < 1$ et donc $\boxed{\text{le jeu ne peut pas être rentable}}$ car on a supposé $M \geqslant 2$.

10.1 Par théorème de transfert on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(e^{\lambda(X_1-p)}\right) &= P(X_1=0)e^{\lambda(0-p)} + P(X_1=1)e^{\lambda(1-p)} \\ &= (1-p)e^{\lambda(0-p)} + pe^{\lambda(1-p)} = h(\lambda) = e^{g(\lambda)}.\end{aligned}$$

D'où le résultat $\boxed{\mathrm{E}\left(e^{\lambda(X_1-p)}\right) = e^{g(\lambda)}}$.

10.2 On commence par remarquer :

$$\exp\left(\lambda\left(S_N - Np\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^N \lambda\left(X_k-p\right)\right) = \prod_{k=1}^N \exp\left(\lambda\left(X_k-p\right)\right).$$

D'où par indépendance des X_k :

$$\mathrm{E}\left(e^{\lambda(S_N-Np)}\right) = \prod_{k=1}^N \mathrm{E}\left(e^{\lambda(X_k-p)}\right) = \prod_{k=1}^N e^{g(\lambda)} = e^{Ng(\lambda)}.$$

Ce qui prouve $\boxed{\mathrm{E}\left(e^{\lambda(S_N-Np)}\right) \leqslant e^{\frac{N}{2}\lambda^2}}$ car on a admis $g(\lambda) \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.

10.3 On commence par écrire (en utilisant la croissance de l'exponentielle et la positivité de λ) :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(S_N - Np \geqslant N\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda(S_N-Np)} \geqslant e^{\lambda N\varepsilon}\right).$$

En appliquant linégalité de markov à la variable aléatoire $X = e^{\lambda(S_N - Np)}$ on obtient :

$$P\left(X \geqslant e^{\lambda N\varepsilon}\right) \leqslant \frac{E(X)}{e^{\lambda N\varepsilon}} \iff P\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{E\left(e^{\lambda(S_N - Np)}\right)}{e^{\lambda N\varepsilon}}.$$

En utilisant ensuite la question précédente on en déduit :

$$P\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{e^{\frac{N}{2}\lambda^2}}{e^{\lambda N\varepsilon}} = e^{\frac{N}{2}\lambda^2 - \lambda N\varepsilon}.$$

D'où le résultat : $\boxed{\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-N\lambda\varepsilon + \frac{N}{2}\lambda^2\right)}$.

10.4 On cherche $\varepsilon > 0$ tel que :

$$-N\lambda\varepsilon + \frac{N}{2}\lambda^2 = -\frac{N}{2}\varepsilon^2 \iff \varepsilon^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2 = 0 \iff (\lambda - \varepsilon)^2 = 0.$$

Cela prouve que $\boxed{\lambda = \varepsilon}$ convient.

11. L'inégalité donnée majore la probabilité que l'erreur commise en approximant $\frac{S_N}{N}$ par p soit supérieure à ε. Donc en prenant pour ε le seuil de tolérance, on obtient une majoration de la probabilité que l'approximation ne soit pas acceptable. De plus, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} e^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2} = 0$, ce qui prouve qu'en prenant N suffisament grand on peut rendre l'approximation acceptable.

    La méthode des grandes déviations est plus acceptable que celle de la loi des grands nombres dès que $e^{-\frac{N}{2}\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2} \iff f\left(\frac{N}{2}\varepsilon^2\right) \leqslant \frac{1}{8}$ où $f(x) = xe^{-x}$. Il suffit alors de tracer la courbe représentative de f (voir la figure ci-dessous), puis de déterminer par lecture graphique quand la condition $f(x) \leqslant \frac{1}{8}$ est satisfaite.

    Comme $\frac{1}{8} = 0.125$ on déduit du graphe ci-dessous (par lecture graphique) que la méthode des grandes déviations est meilleure si $\frac{N}{2}\varepsilon^2 < 0.15$ ou si $\frac{N}{2}\varepsilon^2 > 3.3$ (car f tend vers 0 en $+\infty$).