

A. Théorème du point fixe

1) Soit y un éventuel second point fixe de f . L'inégalité $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ entraîne alors $(1-k) \|x-y\| \leq 0$ et comme $1-k > 0$, cette majoration n'est possible que si $\|x-y\|=0$, c'est-à-dire si $x = y$: le point fixe x est donc unique, sous réserve d'existence.

2) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a, par inégalité triangulaire :

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| .$$

Or, en utilisant $n+i$ fois la k -contractance de f ,

$$\|x_{n+i+1} - x_{n+i}\| = \|f^{n+i}(x_1) - f^{n+i}(x_0)\| \leq k^{n+i} \|x_1 - x_0\| ,$$

d'où $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \|x_1 - x_0\|$, soit encore

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{(1 - k^p)k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

vu que $0 \leq k < 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ et que $\frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - k}$ est une constante, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon .$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy.

3) E étant complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $x \in E$. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et que A est fermé, on a $x \in A$.

Enfin, f étant continue car k -lipschitzienne, il vient $f(x) = x$ en passant à la limite dans l'égalité $f(x_n) = x_{n+1}$.

On peut alors conclure que f possède un point fixe, nécessairement unique d'après le 1).

B. Invariance par homotopie

4) L'ensemble T n'est pas vide car il contient clairement 0 : en effet, f admet un point fixe donc il existe $x \in A$ tel que $x = h(0, x)$.

5) $- t_n \in T$ signifie qu'il existe $x_n \in A$ tel que $x_n = h(x_n, t_n)$, ce qui justifie l'existence d'une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- De plus, $\|x_n - x_m\| = \|h(x_n, t_n) - h(x_m, t_m)\|$, d'où

$$\|x_n - x_m\| \leq \|h(x_n, t_n) - h(x_n, t_m)\| + \|h(x_n, t_m) - h(x_m, t_m)\| \leq k'|t_n - t_m| + k \|x_n - x_m\|$$

par inégalité triangulaire puis en utilisant les propriétés **a**) et **b**).

Il en résulte que $(1-k) \|x_n - x_m\| \leq k'|t_n - t_m|$, d'où $\|x_n - x_m\| \leq \frac{k'}{1-k} |t_n - t_m|$ étant donné que $1-k > 0$.

6) - Comme $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers t , c'est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n, m \geq n_0, |t_n - t_m| \leq \varepsilon ,$$

d'où $\forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| \leq \frac{k'}{1-k} \varepsilon$.

$\frac{k'}{1-k}$ étant une constante, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans l'ensemble A , partie fermée d'un evn complet : elle converge donc vers un certain $\ell \in A$.

– Observons que h est continue. En effet, pour tous couples (x, t) et (y, u) de $A \times [0, 1]$,

$$\|h(x, t) - h(y, u)\| \leq \|h(x, t) - h(y, t)\| + \|h(y, t) - h(y, u)\| \leq k \|x - y\| + k'|t - u|.$$

Il en résulte que $\|h(x, t) - h(y, u)\| \leq \max(k, k') \times \max(\|x - y\|, |t - u|)$, ce qui montre même que h est lipschitzienne de rapport $\max(k, k')$ (au sens de la norme produit de $E \times \mathbb{R}$).

– La continuité de h permet alors de passer à la limite dans l'égalité $x_n = h(x_n, t_n)$, ce qui donne $\ell = h(\ell, t)$ et établit que $t \in T$.

– On conclut alors que T est fermé par caractérisation séquentielle.

7) Si on avait $d(x, \partial A) = 0$, il existerait une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans ∂A telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Or $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ est fermé (comme intersection de deux fermés) donc on aurait $x \in \partial A$, d'où $x \neq h(x, t)$ d'après la propriété $\boxed{\text{c}}$: contradiction.

8) D'après l'inégalité établie à la question 6),

$$\|x - h(y, u)\| = \|h(x, t) - h(y, u)\| \leq k \|x - y\| + k'|t - u|.$$

Les conditions de l'énoncé conduisent alors à $\|x - h(y, u)\| \leq kr + k'\varepsilon \leq kr + (1-k)r = r$.

9) Vérifions les hypothèses du théorème de Picard.

– $\overline{B}(x, r)$ est un fermé de l'espace de Banach E qui est en fait inclus dans A car $r < d(x, \partial A)$. En effet, si $\overline{B}(x, r)$ contenait un élément y de $E \setminus A$, alors $\{x' \in [x, y] / [x, x'] \subset A\}$ serait un segment (puisque A est fermé) de la forme $[x, z]$ avec $z \in A$ et, par définition de z , celui-ci serait adhérent à $E \setminus A$, d'où $z \in \partial A$ avec $\|x - z\| < r$: impossible.

– L'application $\varphi_u : y \mapsto h(y, u)$ est définie de $\overline{B}(x, r)$ dans lui-même d'après le 8).

– φ_u est k -contractante. En effet, selon le $\boxed{\text{a}}$, $\forall y, y' \in \overline{B}(x, r)$,

$$\|\varphi_u(y) - \varphi_u(y')\| = \|h(y, u) - h(y', u)\| \leq k \|y - y'\|.$$

D'après le théorème de Picard, φ_u admet donc un unique point fixe ℓ .

Celui-ci appartient de plus à $\overset{\circ}{A}$ car si on avait $\ell \in \partial A$, on aurait $\ell \neq h(\ell, u)$ en vertu du $\boxed{\text{c}}$.

10) – Le fait que φ_u possède un point fixe signifie que $u \in T$.

La question précédente montre ainsi que $\forall t \in T, \exists \varepsilon > 0 /]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\cap [0, 1] \subset T$. L'ensemble T est donc un voisinage de chacun de ses points pour la topologie induite sur $[0, 1]$, donc un ouvert relatif à $[0, 1]$.

– Soit $\tau = \sup T$: on a déjà $\tau \in T$ vu que T est fermé. De plus, si on avait $\tau < 1$, alors il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $[\tau, \tau + \varepsilon[\subset T$ puisque T est un ouvert relatif à $[0, 1]$, ce qui contredirait la définition de la borne supérieure.

– En conclusion, $\tau = 1$ et, d'après le 9), $\varphi_1 = g$ possède un unique point fixe qui, de plus, est intérieur à A .

11) Soit h l'application définie par $\forall (x, t) \in A \times [0, 1], h(x, t) = tf(x)$. Alors h réalise une homotopie de l'application nulle vers f . Vérifions de plus les propriétés $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$:

– $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], \|h(x, t) - h(y, t)\| = t \|f(x) - f(y)\| \leq tk \|x - y\| \leq k \|x - y\|$.

– $\forall x \in A, \forall t, u \in [0, 1], \|h(x, t) - h(x, u)\| = |t - u| \|f(x)\| \leq k'|t - u|$ où k' désigne le réel $\sup\{\|f(z)\|, z \in A\}$ (qui est bien défini car $f(A)$ est borné).

– La propriété $\boxed{\text{f}}$ est équivalente à $\boxed{\text{c}}$ par définition de h .

D'après la question 10), f possède un unique point fixe, qui est de plus intérieur à A .

C. Étude de certains opérateurs à noyau

12) Pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &= \left| \int_a^b K(t, x) (f(x, y(x)) - f(x, z(x))) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |K(t, x)| \cdot K_0 \cdot |y(x) - z(x)| dx \quad (\text{car } y(x) \in D \text{ et } z(x) \in D) \\ &\leq \int_a^b |K(t, x)| \cdot K_0 \cdot \|y - z\| dx \leq \alpha K_0 \|y - z\|. \end{aligned}$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|$, il vient alors $\|F(y) - F(z)\| \leq \alpha K_0 \|y - z\|$.

13) Vérifions les hypothèses de la question 11) :

- A est une partie fermée non vide de E .
- Comme $k = \alpha K_0 < 1$, la fonction F est k -contractante d'après le 12).
- Le vecteur nul est intérieur à A (condition $\boxed{\text{d}}$).
- La fonction nulle z vérifie $\forall t \in [a, b]$, $z(t) \in D$ donc, d'après le 12) à nouveau,

$$\forall y \in A, \quad \|F(y) - F(z)\| \leq \alpha K_0 \|y\|$$

si bien que $\|F(y)\| \leq \alpha K_0 \|y\| + \|F(z)\|$.

Comme A est borné (et z fixé), il en est de même de $F(A)$, d'où la condition $\boxed{\text{e}}$.

- Pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$ n'est autre que la condition $\boxed{\text{f}}$.

D'après le 11), on conclut que F possède un unique point fixe, qui est de plus intérieur à A .

D. Une généralisation

14) - X est non-vidé : en effet, le vecteur nul 0_E appartient à X vu que $0_E = 0.f(0_E)$.

- Prouvons que X est fermé. Pour cela, considérons une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X qui converge vers un certain $x \in E$ et montrons que $x \in X$. Déjà, $x \in A$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et A est fermé.

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists t_n \in [0, 1] / x_n = t_n f(x_n)$. Comme $[0, 1]$ est un segment, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $t \in [0, 1]$. Par passage à la limite dans l'égalité $x_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)})$ (garantie par la continuité de f), on en déduit que $x = t f(x)$, d'où $x \in X$.

Par caractérisation séquentielle, X est donc bien fermé.

- L'application μ est bien définie. En effet, si $x \notin \partial A$, alors $d(x, \partial A) > 0$ (car ∂A est fermé) et si $x \in \partial A$, alors $x \notin X$ donc $d(x, X) > 0$ (car X est fermé). Le dénominateur ne peut donc pas s'annuler.

- μ est continue comme rapport de deux telles applications. En effet, si Ω est une partie quelconque non vide de E , on montre classiquement que $x \mapsto d(x, \Omega)$ est 1-lipschitzienne.

- Enfin, si $x \in X$, alors $\mu(x) = 1$ et si $x \in \partial A$, on a $\mu(x) = 0$.

15) - g est continue sur $\overset{\circ}{A}$ comme produit de deux telles applications.

- Elle l'est évidemment sur $C \setminus A$, qui est un ouvert relatif de C .

- Le problème de continuité se pose donc seulement aux points de ∂A . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C qui converge vers un certain $x \in \partial A$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(x)$.

On a déjà $g(x_n) = 0$ pour les entiers n tels que $x_n \in C \setminus A$, d'où le résultat si on a $x_n \in C \setminus A$ à partir d'un certain rang.

Dans le cas général, soit $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formée des éléments tels que

$x_{\varphi(n)} \in A$. Alors, $g(x_{\varphi(n)}) = \mu(x_{\varphi(n)})f(x_{\varphi(n)})$ a pour limite $\mu(x)f(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_{\varphi(n)}) = 0$, ce qui achève la vérification de la continuité de g .

– Vérifions enfin la compacité de $\overline{g(C)}$.

En revenant à la définition, il s'agit de démontrer que, de toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{g(C)}$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans cet ensemble. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in g(C) / \|y_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$, il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de $\overline{g(C)}$.

Par définition de $g(C)$, il existe $x_n \in C$ tel que $y_n = g(x_n)$.

• S'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in C \setminus A$, alors on peut extraire de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle, qui est bien une suite convergente dans $\overline{g(C)}$.

• Sinon, on a $y_n = \mu(x_n)f(x_n)$ pour n assez grand. La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $f(A)$ donc dans le compact $\overline{f(A)}$: on peut donc en extraire une sous-suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans $\overline{f(A)}$.

De plus, $(\mu(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle à valeurs dans le segment $[0, 1]$: une nouvelle extraction conduit à une sous-suite $(\mu(x_{\psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans $[0, 1]$. La suite $(\mu(x_{\psi(n)})f(x_{\psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers un élément de $\overline{g(C)}$, ce qui permet de conclure sur la compacité de $\overline{g(C)}$.

16) La fonction g précédente satisfait les hypothèses du théorème de Schauder, donc possède un point fixe x .

– Si $x = 0$, alors 0 est point fixe de f et est bien intérieur à A .

– Sinon, on a $x \in A$ et $\mu(x)f(x) = x$ donc $x \in X$ étant donné que $\mu(x) \in [0, 1]$. Mais dans ces conditions, $\mu(x)$ vaut alors 1, d'où $f(x) = x$. De plus, x est intérieur à A , car dans le cas contraire, on aurait $x \in \partial A$, d'où $\mu(x) = 0$: impossible.

E. Application aux intégrales de Fredholm

17) – Pour tout $t \in [0, 1]$ on a, par croissance de l'intégrale puis par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t)| &\leq \|h\|_0 + \int_0^1 |K(t, x)| \cdot |g(x, \varphi(x))| dx \\ &\leq \|h\|_0 + \sqrt{\int_0^1 K^2(t, x) dx} \times \sqrt{\int_0^1 g^2(x, \varphi(x)) dx}. \end{aligned}$$

En posant $c_\varphi = \sqrt{\int_0^1 g^2(x, \varphi(x)) dx}$, on obtient l'inégalité $|F(\varphi)(t)| \leq \|h\|_0 + c_\varphi \|K_t\|_2$ d'où on tire $|F(\varphi)(t)| \leq \|h\|_0 + c_\varphi \cdot \sup\{\|K_s\|_2, s \in [0, 1]\}$ (la borne supérieure existant bien par continuité de $t \mapsto K_t$ définie sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs dans L^2).

– De même, pour tous $t, u \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| &\leq |h(t) - h(u)| + \int_0^1 |K(t, x) - K(u, x)| \cdot |g(x, \varphi(x))| dx \\ &\leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2. \end{aligned}$$

18) Fixons $u \in [0, 1]$. D'après la condition $\boxed{\text{k}}$, l'application $t \mapsto K_t$ est continue au point u , ce qui signifie, vu que l'espace d'arrivée est L^2 , que $\lim_{t \rightarrow u} \|K_t - K_u\|_2 = 0$. Par continuité de h , on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow u} (|h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2) = 0$$

vu que c_φ est une constante.

D'après la seconde inégalité du **17**), la fonction $F(\varphi)$ est alors continue au point u et le choix arbitraire de u et de φ montre que F définit bien une application de E dans E .

- 19)** Fixons $t \in [0, 1]$. Alors $F(\varphi_n)(t) = h(t) + \int_0^1 f_n(x) dx$ avec $f_n(x) = K(t, x).g(x, \varphi_n(x))$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application $x \mapsto K(t, x).g(x, \varphi(x))$ par convergence simple (et même uniforme) de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et continuité de g . En outre, toutes ces fonctions sont continues (donc c.p.m.) sur $[0, 1]$.

Notons de plus que toutes les fonctions φ_n sont à valeurs dans $[-M, M]$ vu que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{B}(0, M)$.

L'application g étant continue sur $[0, 1] \times [-M, M]$, elle est bornée (par un certain A) sur ce compact, ce qui conduit à l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |f_n(x)| \leq \|K_t\|_0 \times A$$

et la fonction constante $x \mapsto \|K_t\|_0 \times A$ est intégrable sur $[0, 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\varphi_n)(t) = h(t) + \int_0^1 K(t, x).g(x, \varphi(x)) dx,$$

c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\varphi_n)(t) = F(\varphi)(t)$. Le choix de t étant arbitraire, ceci établit bien la convergence simple de la suite $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $F(\varphi)$ sur $[0, 1]$.

- 20)** Observons, avec les notations du **19**), que $\forall n \in \mathbb{N}, c_{\varphi_n} = \sqrt{\int_0^1 g^2(x, \varphi_n(x)) dx} \leq A$.

Par uniforme continuité des fonctions h et $t \mapsto K_t$ sur le segment $[0, 1]$ (théorème de Heine),

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall t, u \in [0, 1], \quad |t - u| < \delta \implies |h(t) - h(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \|K_t - K_u\|_2 < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

En utilisant la seconde inégalité du **17**), il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t, u \in [0, 1], \quad |t - u| < \delta \implies |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \varepsilon.$$

- 21)** Supposons que $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction G sur $[0, 1]$.

– Vérifions tout d'abord que G est continue. Pour cela, reprenons le résultat du **20**) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall t, u \in [0, 1], \quad |t - u| < \delta \implies \forall n \in \mathbb{N}, \quad |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \varepsilon.$$

Par passage à la limite (pour $t, u \in [0, 1]$ arbitrairement fixés tels que $|t - u| < \delta$), il vient $|G(t) - G(u)| \leq \varepsilon$ d'où, en récapitulant les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall t, u \in [0, 1], \quad |t - u| < \delta \implies |G(t) - G(u)| \leq \varepsilon,$$

ce qui établit même l'uniforme continuité de G .

– Utilisons à présent l'indication (d'ailleurs évidente) de l'énoncé. Avec les notations précédentes, il existe $t_1, t_2, \dots, t_N \in [0, 1]$ tels que tout $u \in [0, 1]$ appartienne à l'un des intervalles $]t_i - \delta, t_i + \delta[$.

Par convergence simple de $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vers G , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad |F(\varphi_n)(t_i) - G(t_i)| < \varepsilon.$$

Pour un choix de i tel que $u \in]t_i - \delta, t_i + \delta[$ on obtient, par inégalité triangulaire :

$$|F(\varphi_n)(u) - G(u)| \leq |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_n)(t_i)| + |F(\varphi_n)(t_i) - G(t_i)| + |G(t_i) - G(u)| \leq 3\varepsilon$$

d'après ce qui précède.

L'entier n_0 étant indépendant du choix de u , on conclut que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \|F(\varphi_n) - G\|_0 \leq 3\varepsilon.$$

En d'autres termes, la suite $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers G dans l'espace E muni de la norme de la convergence uniforme.

– Or d'après la question **19**), si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers φ dans E , alors la suite de fonctions $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0, 1]$. Le raisonnement précédent montre alors que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(\varphi)$ dans E . On conclut alors que F est continue par caractérisation séquentielle.

22) – Considérons une partie dense dénombrable de $[0, 1]$, par exemple l'ensemble $R = \{r_k, k \in \mathbb{N}\}$ des rationnels de $[0, 1]$, et construisons pour commencer une sous-suite de $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement sur R .

D'après l'inégalité $|F(\varphi_n)(t)| \leq \|h\|_0 + c_{\varphi_n} \cdot \sup\{\|K_s\|_2, s \in [0, 1]\}$ de la question **17**) et en reprenant les notations de la question **19**), il vient

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |F(\varphi_n)(t)| \leq \|h\|_0 + A \cdot \sup\{\|K_s\|_2, s \in [0, 1]\}.$$

En particulier, la suite réelle $(F(\varphi_n)(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $t \in [0, 1]$.

• Comme $(F(\varphi_n)(r_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe une extraction θ_0 telle que $(F(\varphi_{\theta_0(n)})(r_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

• De même, on peut extraire de $(F(\varphi_{\theta_0(n)})(r_1))_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(F(\varphi_{\theta_0 \circ \theta_1(n)})(r_1))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente et $(F(\varphi_{\theta_0 \circ \theta_1(n)})(r_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge encore en tant que sous-suite d'une suite convergente.

• De proche en proche, on définit des extractions $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p \dots$ telles que

$$(F(\varphi_{\theta_0 \circ \dots \circ \theta_p(n)})(r_k))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge pour tous } k, p \in \mathbb{N} \text{ tels que } k \leq p.$$

Par un "procédé diagonal", posons alors $\theta(p) = \theta_0 \circ \dots \circ \theta_p(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite $(\theta(p))_{p \in \mathbb{N}}$ est alors strictement croissante et, d'après ce qui précède, $(F(\varphi_{\theta(p)})(r_k))_{p \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On a ainsi établi la convergence simple de $(F(\varphi_{\theta(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ sur R .

– Étendons pour finir le résultat à $[0, 1]$ tout entier.

Soit t un réel donné de $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Avec les notations du **20**), il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|t - r_k| < \delta$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on commence par majorer $|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)|$ par

$$|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(p)})(r_k)| + |F(\varphi_{\theta(p)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| + |F(\varphi_{\theta(q)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)|.$$

D'après la question **20**), $|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(p)})(r_k)| \leq \varepsilon$ et $|F(\varphi_{\theta(q)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| \leq \varepsilon$.

De plus, la convergence simple obtenue sur R entraîne l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall p, q \geq n_0, |F(\varphi_{\theta(p)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| \leq \varepsilon$ (sens "facile" de la condition de Cauchy).

Il vient alors $\forall p, q \geq n_0, |F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)| \leq 3\varepsilon$, ce qui montre que $(F(\varphi_{\theta(p)})(t))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc convergente (sens "difficile" de la condition de Cauchy).

On a donc bien démontré que $(F(\varphi_{\theta(p)}))_{p \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$.

23) Récapitulons les étapes précédentes.

– Pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A , la suite $(F(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $[0, 1]$.

– D'après le **21**), cette sous-suite converge en fait dans E .

– Cela signifie précisément que $\overline{F(A)}$ est compact.

– Les conditions **[g]** et **[i]** étant vérifiées de manière immédiate (vu que $\varphi \in \partial A$ équivaut à $\|\varphi\|_0 = M$ pour cette dernière), la question **16**) permet alors de conclure sur l'existence d'un point fixe de F intérieur à A , c'est-à-dire de norme strictement inférieure à M .