

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
 ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES,
 DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE,
 DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY,
 DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

**

CONCOURS D'ADMISSION 1981

MATHÉMATIQUES

Options M, P' et T.A.

1ère EPREUVE

(Durée 4 heures)

PREAMBULE

Il est vivement conseillé aux candidats de suivre les recommandations suivantes :

- l'étude systématique des applications du type $x \rightsquigarrow \int_a^b f(t,x) dt$

ne figure pas au programme ; il est donc conseillé aux candidats de démontrer les propriétés demandées par des raisonnements directs plutôt que d'utiliser des théorèmes en dehors du programme.

- conformément au programme, les candidats peuvent intervertir les deux signes d'intégration dans le calcul d'une intégrale double d'une fonction continue étendue à un pavé $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$.

- les deux premières parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats établis dans les deux premières.

I.- \mathbb{R}_+^* désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$f_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \qquad g_n(x) = \int_0^n \frac{t}{1+t^2} e^{-xt} dt$$

$$h_n(x) = \int_0^n \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1°) Montrer que les fonctions f_n, g_n et h_n sont définies sur \mathbb{R} et sont continues.

Indication : considérer la fonction ϕ :

$$\phi(x) = \int_0^n \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt \qquad k = 0, 1, 2$$

.../...

- 2 -

2°) Montrer :

a - pour $x \geq 0$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers une limite $f(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

b - pour $x > 0$, les suites $\left(g_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(h_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent en croissant respectivement vers $g(x)$ et $h(x)$.

3°) Montrer qu'il existe une suite de réels α_n positifs tendant vers 0, quand n croît indéfiniment telle que pour tout $x \geq 0$ $|f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$.

En déduire que f est continue pour $x \geq 0$.

4°) Pour $x > 0$, établir entre $f(x)$ et $h(x)$ une relation permettant de prouver la continuité de h sur \mathbb{R}_+^* .

5°) Pour $0 < a \leq x$, trouver la limite de $I_n(x) = \int_a^x \left(h(\lambda) - h_n(\lambda)\right) d\lambda$ pour $n \rightarrow \infty$. Calculer $\int_a^x h_n(\lambda) d\lambda$ et en déduire que

$$\int_a^x h(\lambda) d\lambda = g(a) - g(x)$$

En déduire que g est continue sur \mathbb{R}_+^* .

6°) Pour $0 < a \leq x$, trouver la limite de

$$J_n(x) = \int_a^x \left(g(\lambda) - g_n(\lambda)\right) d\lambda \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Calculer $\int_a^x g_n(\lambda) d\lambda$ et en déduire :

$$\int_a^x g(\lambda) d\lambda = f(a) - f(x)$$

7°) Déduire des résultats précédents que f est deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Quelles sont sur \mathbb{R}_+^* ses deux premières dérivées ?

Trouver une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants vérifiée par f sur \mathbb{R}_+^* .

.../...

II - 1°) Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin x}{x + n\pi} dx$

est convergente

En déduire que les intégrales $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$, $\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$, où x est

un réel strictement positif, sont convergentes. Préciser la somme de la série

$$u_n : S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n .$$

2°) Etudier, pour $x > 0$, la convergence de l'intégrale $K(x) = \int_0^\infty \frac{x \sin t}{t(t+x)} dt$

et sa limite pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures.

En déduire, que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $L(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t+x} dt$

est convergente.

Trouver les limites de $L(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et lorsque x croît indéfiniment.

3°) Soit l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + y = \frac{1}{x}$$

la fonction inconnue y sera supposée définie sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que la solution générale y de (E) peut s'écrire sous la forme :

$$y(x) = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x)$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée à (E) et où u et v sont deux fonctions qui vérifient les relations :

$$\forall x > 0 \quad \begin{cases} u'(x) y_1(x) + v'(x) y_2(x) = 0 \\ u'(x) y_1'(x) + v'(x) y_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

En déduire l'expression de la solution générale de (E) à l'aide de $L(x)$.

III - Montrer : $\forall x > 0 \quad f(x) = L(x)$; en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt.$$