

Centrale - Supélec - PSI - I - 2020

Gestion des erreurs dans un processus industriel

I. Cas de la loi de Poisson

I.A. Questions de cours

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(1/2)$. On note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Q 1. D'après le lemme des coalitions, S_n dépend des X_k pour $k \leq n$, donc est indépendante de X_{n+1} par indépendance mutuelle de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Pour une démonstration directe (n'apportant pas grand chose),

$$\forall m \in \mathbb{N}: (S_n = m) = \bigsqcup_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = m}} \bigcap_{k=1}^n (X_k = i_k) \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \forall (m, j) \in \mathbb{N}^2: \mathbf{P}(S_n = m, X_{n+1} = j) &= \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = m}} \mathbf{P}(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = j) \\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} = j) \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = m}} \mathbf{P}(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j) \mathbf{P}(S_n = m). \end{aligned}$$

Q 2. Le terme *explicitement* signale une question de cours. On refait donc le calcul en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, de rayon de convergence infini. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1/2)$,

$$G_{X_1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_1 = n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-1/2} \frac{(1/2)^n}{n!} t^n = e^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t/2)^n}{n!} = e^{-1/2} \exp(t/2) = e^{(t-1)/2}.$$

Q 3. Par indépendance mutuelle de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$, $G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (G_{X_1}(t))^n$.

Q 4. On reconnaît dans $G_{S_n}(t) = e^{n(t-1)/2}$ la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $n/2$, donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n/2)$, la fonction génératrice caractérisant la loi.

I.B. Un équivalent de $\mathbf{P}(S_n > n)$

Q 5. La loi de $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n/2)$ et l'expression $(S_n > n) = \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} (S_n = i)$ comme réunion disjointe donnent

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbf{P}(S_n > n) = n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-n/2} \binom{n}{i} \frac{1}{i!} \stackrel{(k=i-n)}{=} e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} \left(\frac{n}{2}\right)^k = e^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Q 6. La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante et un produit de réels positifs inférieurs à 1 est inférieur à 1, d'où

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \leq \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} = \frac{n! n^k}{(n+k)!} \leq 1.$$

Q 7. Si $u_k: x \mapsto \frac{1}{2^k(1+kx)^k}$ est définie sur \mathbb{R}_+ , alors elle est positive, décroissante, et $\|u_k\|_{\infty} = u_k(0) = \frac{1}{2^k}$, terme général d'une suite géométrique convergente. Il s'ensuit que $\sum u_k$ est normalement convergente.

Q 8. En particulier, $\sum_{k \geq 1} u_k(1/n)$ converge et, la convergence normale impliquant la convergence uniforme, le théorème de la double limite donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. On regroupe les résultats obtenus aux questions Q5 à Q8.

$$\mathbf{P}(S_n > n) = \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (\text{Q5.})$$

$$1 \stackrel{(\text{Q8.})}{\longleftarrow} \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{(\text{Q6.})}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n! n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \stackrel{(\text{Q6.})}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

$$\therefore \mathbf{P}(S_n > n) \sim \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. La formule de Stirling permet de remplacer $n!$ par un équivalent dans l'équivalent ci-dessus. Il vient

$$\mathbf{P}(S_n > n) \sim \frac{e^{-n/2}}{n!} \left(\frac{n}{2}\right)^n \sim e^{-n/2} \frac{e^n}{n^n} \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \mathfrak{o}(\alpha^n)$$

avec $\alpha = \frac{\sqrt{e}}{2}$. Notons que $\alpha < 1$, ou bien parce que la calculatrice donne $\alpha \simeq 0,82$, ou bien parce que $e < 4$ si l'on a oublié sa calculatrice à la maison.

II. Quelques résultats sur les matrices (autour du théorème de Perron-Frobenius)

II.A. Puissances d'une matrice strictement positive

Q 11. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$ et $x \in \mathbb{R}_+^n$. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Ax|_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geq 0$, donc $Ax \geq 0$. Si, de plus, $x \neq 0$ avec, disons, $x_{j_0} > 0$, on a $Ax|_i \geq a_{i,j_0}x_{j_0} > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc $Ax > 0$.

Q 12. L'ensemble des matrices strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit d'après la question précédente et $C_j(AB) = AC_j(B)$. Par une récurrence immédiate, A^k est alors strictement positive pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 13. Si $\rho(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$, donc A est semblable à une matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{C})$, donc A est nilpotente (ce sent en fait des équivalences). Or, une matrice nilpotente ne peut pas être strictement positive d'après la question Q12. Ainsi, $\rho(A) > 0$. Par ailleurs, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Sp}(\alpha A) = \alpha \text{Sp}(A)$ (car $AX = \lambda X$ entraîne $(\alpha A)X = (\alpha\lambda)X$), donc

$$\text{Sp}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = \left\{ \frac{\lambda}{\rho(A)} ; \lambda \in \text{Sp}(A) \right\} \quad \therefore \quad \rho\left(\frac{A}{\rho(A)}\right) = \max \left\{ \frac{|\lambda|}{\rho(A)} ; \lambda \in \text{Sp}(A) \right\} = \frac{\rho(A)}{\rho(A)} = 1.$$

Q 14. Si A est diagonalisable, il existe P inversible et une énumération $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ du spectre de A compté avec ses multiplicités telles que $A = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) P^{-1} = PDP^{-1}$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^m &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} \dots (P^{-1}P)DP^{-1} = PD^m P^{-1} \\ &= P \text{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} P \text{diag}(\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_1^m, \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_2^m, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_n^m) P^{-1} = P \times 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \times P^{-1} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant que $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et la continuité (nous sommes en dimension finie) de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$.

Complément 1. Il n'est pas très difficile de démontrer le cas général, admis dans le sujet. Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A . Soit m un entier naturel tel que $m > n$. Notons $t_{i,j}^{(m)}$ le coefficient générique de la matrice T^m . Alors, $t_{i,j}^{(m)} = 0$ si $i > j$ et $t_{i,i}^{(m)} = t_{i,i}^m$ et l'on a en particulier $t_{i,i}^{(m)} = \mathcal{O}(\rho(A)^m)$. Si $i < j$, on peut écrire

$$t_{i,j}^{(m)} = \sum_{i \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{m-1} \leq j} t_{i,k_1} t_{k_1,k_2} \dots t_{k_{m-2},k_{m-1}} t_{k_{m-1},j}.$$

Parmi les éléments de l'un des produits $t_{i,k_1} t_{k_1,k_2} \dots t_{k_{m-2},k_{m-1}} t_{k_{m-1},j}$, au plus $j - i < n$ ne sont pas des éléments diagonaux. Les produits d'éléments non diagonaux intervenant dans ces sommes quand m varie comprennent au plus $n - 1$ termes et sont donc en nombre fini, et il reste au moins $m - n$ éléments diagonaux. On peut donc écrire $t_{i,k_1} t_{k_1,k_2} \dots t_{k_{m-1},j} = \mathcal{O}(\rho(A)^m)$ avec une constante dans le grand \mathcal{O} ne dépendant que de la matrice T . Enfin, le nombre de termes de la somme est le nombre de suites croissantes $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ de $\llbracket i, j \rrbracket$ possibles, qui vaut

(c'est un dénombrement classique) $\binom{j-i+m}{m-1} = \mathcal{O}(m^n)$. Finalement, $t_{i,j}^{(m)} = \mathcal{O}(m^n \rho(A)^m)$, d'où $\lim t_{i,j}^{(m)} = 0$ par croissances comparées.

II.B. Une matrice strictement positive de rayon spectral égal à 1 admet 1 comme valeur propre

Q 15. Jusqu'à la question Q23, A est une matrice strictement positive de rayon spectral égal à 1. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et $x \in E_\lambda(A)$. Alors

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : |x_i| = |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| = (A|x|)_i \quad \therefore \quad |x| \leq A|x|.$$

Q 16. Dans les questions Q16 à Q18, on suppose que $A|x| \neq |x|$. Ainsi, $A|x| - |x| \geq 0$ et, d'après la question Q11, $A(A|x| - |x|) > 0$, soit $A^2|x| > A|x|$.

Posons $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(A^2|x|)_i}{(A|x|)_i} - 1$. Comme i ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on a $\varepsilon > 0$ et $A^2|x| \geq (1 + \varepsilon)A|x|$.

Q 17. Comme A^{k-1} est strictement positive, la question Q11 montre que l'inégalité $A^2|x| \geq (1 + \varepsilon)A|x|$ entraîne $A^{k+1}|x| \geq (1 + \varepsilon)A^k|x|$, d'où, par une récurrence immédiate,

$$A^{k+1}|x| \geq (1 + \varepsilon)A^k|x| \geq (1 + \varepsilon)^k A|x| \quad \therefore \quad B^k A|x| \geq A|x|.$$

Q 18. De $\rho(A) = 1$, on déduit $\rho(B) = \frac{1}{1 + \varepsilon}$, d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ par la généralisation, admise, de Q 14.

Q 19. Le théorème des gendarmes montre alors que $A|x| = 0$, d'où $|x| = 0$, ce qui contredit que x est un vecteur propre. Les questions Q16 à Q18 forment donc un raisonnement par l'absurde et l'on a ainsi $A|x| = |x| : 1 \in \text{Sp}(A)$ et $E_1(A)$ contient un vecteur à coordonnées positives.

II.C. Démonstration de la proposition 1

Q 20. Compte tenu de la question Q19, il reste à montrer que le vecteur x considéré dans la partie II.B est strictement positif. De fait, si $x_{i_0} = 0$, alors $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = x_{i_0} = 0$, ce qui entraîne $x = 0$ par positivité stricte de A et contredit de ce fait le fait que $|x|$ est un vecteur propre de A .

Q 21. Soient λ une valeur propre de A de module 1 et x un vecteur propre (complexe) associé. Soit i un indice tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$. Alors,

$$\|x\|_\infty = |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \stackrel{(Q19.)}{=} |x_i| = \|x\|_\infty.$$

L'inégalité est donc ici une égalité et la propriété rappelée (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire généralisée sur \mathbb{C}) montre qu'il existe des réels positifs λ_j tels que $x_j = \lambda_j x_1$, ce qui montre que le vecteur positif $\Lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n)^\top$ appartient à $E_\lambda(A)$, d'où $\lambda \geq 0$ et, donc, $\lambda = 1$. Ainsi, 1 est la seule valeur propre de A de module 1.

Q 22. Le calcul précédent montre que tous les vecteurs de $E_1(A)$ sont colinéaires à un vecteur strictement positif. Cela entraîne que $\dim E_1(A) = 1$: si x et y sont deux vecteurs propres strictement positifs associés à la valeur propre 1, alors $z = x - \frac{x_1}{y_1} y$ a sa première coordonnée nulle, donc est nul, donc x et y sont colinéaires.

Q 23. Soit A une matrice strictement positive telle que $\rho(A) = 1$. Alors, $\rho(A)$ est valeur propre de A (Q19.), et c'est une valeur propre dominante (Q21). L'espace propre associé est une droite vectorielle (Q22.) et est dirigée par un vecteur strictement positif (Q20.). On a donc montré la proposition 1 dans le cas d'un rayon spectral égal à 1. Le cas général s'y ramène immédiatement en considérant $B = \frac{1}{\rho(A)}(A)$, de rayon spectral égal à

1 (Q13.), dont le spectre est l'image de $\text{Sp}(A)$ par l'homothétie de rapport $1/\rho(A)$ avec les mêmes espaces propres ;
 $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) : E_\lambda(A) = E_{\lambda/\rho(A)}(B)$.

II.D. Démonstration de la proposition 2

Q 24. On suppose que A est strictement positive et diagonalisable sur \mathbb{C} (on n'utilise pas cette dernière hypothèse ici). On pose $S = \text{Sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soient $\lambda \in S$ et $Y \in E_\lambda(A)$. D'après la proposition 1, $|\lambda| < \rho(A)$, d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^p = 0 \quad \therefore \quad Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^p Y = \frac{1}{(\rho(A))^p} A^p Y = \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^p Y \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Q 25. Comme A est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}_+)$. On peut alors décomposer

$Y = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} Y_\lambda$ avec $Y_\lambda \in E_\lambda(A)$. D'après la question Q24,

$$Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^p Y = \frac{1}{\rho(A)^p} \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^p Y_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^p Y_\lambda = Y_{\rho(A)} + \sum_{\substack{\lambda \in \text{Sp}(A) \\ \lambda \neq \rho(A)}} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)} \right)^p Y_\lambda \xrightarrow{p \rightarrow \infty} Y_{\rho(A)}.$$

Comme Y est positif, les vecteurs Y_p le sont également et, \mathbb{R}_+^n étant un fermé de \mathbb{R}^n , $Y_{\rho(A)} \geq 0$. De plus, si $Y_{\rho(A)} \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre dominante, donc un vecteur directeur de la droite vectorielle $E_{\rho(A)}$. Comme l'on sait que celle-ci est engendrée par un vecteur strictement positif, $Y_{\rho(A)} \geq 0$ est un multiple de ce vecteur et, comme il est positif, il est strictement positif.

Complément 2. Dans la question Q32, on a besoin de savoir que si $Y > 0$, alors $\lim Y_p > 0$. Cela fait partie de la partie admise de la proposition 2. Toutefois, dans le cas diagonalisable, c'est facile à prouver. En effet, tout vecteur strictement positif Y peut s'écrire sous la forme $Y = Y_0 + Y'$ avec $E_{\rho(A)}(A) \ni Y_0 \neq 0$ et $Y' \geq 0$. On a alors $\lim Y_p = Y_0 + \lim Y'_p \geq Y_0 > 0$.

La généralisation au cas non diagonalisable utilise les sous-espaces caractéristiques (au programme en MP) à la place des espaces propres, ce qui permet de traiter le cas des valeurs propres différentes de $\rho(A)$. Pour la valeur propre dominante, il faut encore montrer que le sous-espace caractéristique correspondant est une droite, *i.e.* que $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A . Cela s'obtient en montrant que $\mathbb{R}^n = E_{\rho(A)}(A) \oplus E_{\rho(A)}(A^\top)^\perp$.

II.E. Un calcul itératif du rayon spectral

Q 26. Toute matrice complexe étant trigonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telle que $T = P^{-1}AP$. De plus, les coefficients diagonaux forment une énumération des valeurs propres de A avec leur ordre de multiplicité, soit $t_{i,i} = \lambda_i$ pour $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Alors, $T^k = P^{-1}A^kP$, donc A^k est semblable à la matrice triangulaire T_k , dont les éléments diagonaux sont $t_{i,i}^{(k)} = \lambda_i^k$.

Q 27. Avec les notations de la question précédente, et en notant m l'ordre de multiplicité de la valeur propre dominante (qui vaut en fait 1, mais cela ne fait pas partie du sujet),

$$\frac{\text{tr}(A^{k+1})}{\text{tr}(A^k)} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^k} = \frac{m\rho(A)^{k+1} + \mathfrak{o}(\rho(A)^k)}{m\rho(A)^k + \mathfrak{o}(\rho(A)^k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho(A).$$

III. Une inégalité relative aux chaînes de Markov

III.A. Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n \geq 1}$

Q 28. Soit $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Alors, $(X_2 = j)_{0 \leq j \leq N}$ forme un système complet d'événements et l'on a

$$\sum_{j=0}^N q_{i,j} = \sum_{j=0}^N \mathbf{P}(X_2 = j \mid X_1 = i) = \mathbf{P}_{(X_1=i)} [(X_1 = 0) \uplus (X_2 = 1) \uplus \dots \uplus (X_2 = N)] = \mathbf{P}_{(X_1=i)}(\Omega) = 1.$$

Q 29. La formule du produit matriciel et la formule des probabilités totales appliquée au système complet $(X_n = j)_{0 \leq j \leq N}$ donnent, pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$Q^\top \Pi_n |i = \sum_{j=0}^N q_{j,i} \mathbf{P}(X_n = j) = \sum_{j=0}^N \mathbf{P}(X_{n+1} = i | X_n = j) \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X_{n+1} = i) = \Pi_{n+1} |i,$$

i.e. $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$.

Q 30. Par une récurrence immédiate, la relation $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$ donne $\Pi_n = (Q^\top)^{n-1} \Pi_1$, ce qui montre que la loi de X_1 définit entièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, celle de X_n .

III.B. Définition de la fonction de taux λ

Complément 3. Commençons par démontrer la formule admise en montrant que, pour $U = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathbf{E}(e^{tS_n}) = U(A(t)^\top)^{n-1} Z(t).$$

Pour $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \llbracket 0, N \rrbracket^n$, la formule des probabilités composées et la propriété de Markov (nom de l'hypothèse donnée par l'énoncé tout au début de cette partie) donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) &= \mathbf{P}(X_1 = i_1) \prod_{k=2}^n \mathbf{P}(X_k = i_k | X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_1 = i_1) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = i_1) \prod_{k=2}^n q_{i_{k-1}, i_k}. \end{aligned}$$

Alors, le théorème de transfert et les règles du produit matriciel permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{tS_n}) &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \llbracket 0, N \rrbracket^n} e^{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)t} \mathbf{P}(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \llbracket 0, N \rrbracket^n} \mathbf{P}(X_1 = i_1) e^{i_1 t} \prod_{k=2}^n q_{i_{k-1}, i_k} e^{i_k t} \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \llbracket 0, N \rrbracket^n} z_{i_1}(t) a_{i_1, i_2}(t) a_{i_2, i_3}(t) \cdots a_{i_{n-1}, i_n}(t) \\ &= Z(t)^\top (A(t))^{n-1} U = U^\top (A(t)^\top)^{n-1} Z(t). \end{aligned}$$

Notons que l'existence de l'espérance est triviale, la variable aléatoire e^{tS_n} ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Q 31. Par hypothèse, $a_{i,j}(t) = q_{i,j} e^{jt}$ est le produit de deux réels strictement positifs, donc $A(t)$ est strictement positive. La proposition 1 assure alors qu'elle admet une valeur propre dominante $\gamma(t) = \rho(A(t)) > 0$.

Q 32. On part de l'expression admise $\mathbf{E}(e^{tS_n}) = U(A(t)^\top)^{n-1} Z(t)$. La matrice $A(t)^\top$ est strictement positive et l'on peut appliquer la question Q 25 et son raffinement admis. Comme $Z(t) > 0$, il existe un vecteur $V(t) > 0$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A(t)^\top}{\rho(A(t)^\top)} \right)^n = V(t)$. Toute matrice carrée ayant même spectre, donc même rayon spectral que sa

transposée, la continuité du produit scalaire montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(e^{tS_n})}{\gamma(t)^{n-1}} = UV(t)$, où U est le vecteur ligne dont toutes les coordonnées valent 1. Comme $V(t) > 0$, $UV(t) > 0$ et l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(\mathbf{E}(e^{tS_n})) - n \ln(\gamma(t))] = \ln(\gamma(t)) + \ln(UV(t)) \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[\mathbf{E}(e^{tS_n})]}{n} = \ln(\gamma(t)) = \lambda(t).$$

III.C. Utilisation de Python

Q 33. On peut proposer naturellement deux versions. Attention, si l'on choisit la version récursive à ne pas appeler deux fois la fonction dans le calcul, ce qui ferait passer la complexité de logarithmique à linéaire.

```
def puiss2k(A, k): # itératif
    for i in range(k):
        A = np.dot(A, A)
    return A
```

```
def puiss2k(A, k): # récursif
    if not k:
        return A
    B = puiss2k(A, k-1)
    return np.dot(B, B)
```

Q 34. Le programme fourni utilise la *syntaxe des annotations*, adoptée par le concours depuis deux ans dans ses épreuves d'informatique, qui précise le type des paramètres en entrée de la fonction et celui du résultat qu'elle renvoie. Ainsi, `maxSp` prend trois paramètres : un tableau `Q`, un entier `k` et un flottant `t`.

- La fonction calcule un entier `n` égal au nombre de colonnes de `Q` (dans le cadre du problème, on attend que `Q` code une matrice carrée) ;
- `E` code le vecteur $(1 \ e^t \ e^{2t} \ \dots \ e^{(n-1)t})$;
- `A` code la matrice A de mêmes dimensions que `Q` et dont le coefficient générique est $q_{i,j} = q_{i,j}e^{jt}$; elle est obtenue par la technique de *broadcasting* esquissée dans le préambule de la partie III.C ;
- `B` code la matrice carrée $B = Q^{2^n}$, où Q est la matrice codée par `Q` ; la fonction renverra ici parfois une erreur si `Q` n'est pas une matrice carrée ;
- `C` code la matrice $C = AB = Q^{2^n+1}$, le produit étant celui du calcul matriciel standard ;
- la fonction renvoie le quotient des traces de Q^{2^n+1} et de Q^{2^n} , soit, pour une matrice carrée strictement positive $Q = (q_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$, une approximation du rayon spectral de la matrice $A(t) = (q_{i,j}e^{jt})_{0 \leq i,j \leq N}$ introduite dans la partie III.A (Q27).

III.D. Une majoration théorique et son interprétation

Q 35. La question Q32 montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln [\mathbf{E}(e^{tS_n})]}{n} = \lambda(t)$ et il est admis dans le préambule de la partie III.D que cette convergence est uniforme sur \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{\ln [\mathbf{E}(e^{tS_n})]}{n} - \lambda(t) \right| = 0$. Par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \implies \lambda(t) - \varepsilon \leq \frac{\ln [\mathbf{E}(e^{tS_n})]}{n} \leq \lambda(t) + \varepsilon.$$

Q 36. Par positivité de t , croissance de l'exponentielle, puis par l'inégalité de Markov, qui s'applique car e^{tS_n} est une variable aléatoire positive admettant une espérance, et, enfin, la question Q35,

$$\mathbf{P}(S_n \geq nam) = \mathbf{P}(e^{tS_n} \geq e^{ntam}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tS_n})}{e^{ntam}} \leq e^{-ntam} \times e^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Q 37. On repart de la majoration précédente.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+: \mathbf{P}(S_n \geq nam) \leq e^{n\varepsilon} \times e^{-n(tam-\lambda(t))} \quad \therefore$$

$$\mathbf{P}(S_n \geq nam) \leq \inf_{t \in \mathbb{R}_+} [e^{n\varepsilon} \times e^{-n(tam-\lambda(t))}] = e^{n\varepsilon} \times \exp \left[-n \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (tam - \lambda(t)) \right] = e^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

Q 38. La valeur m , définie comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n}$ représente bien une approximation sur un temps long du *nombre moyen d'erreurs à chaque instant* (discrétisé), comme dit dans le préambule du sujet en première page, la variable aléatoire X_n comptant le nombre d'erreurs à l'instant n . La majoration obtenue à la question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n \geq nam) = 0$ et que la décroissance est très rapide. En effet, comme $a > 1$, $am > m$, donc, ainsi qu'il est admis dans l'énoncé, $\lambda^*(am) > 0$ et $\lambda^*(am) - \varepsilon > 0$ si ε est suffisamment petit. Le système devrait ainsi pouvoir fonctionner correctement.

Dans une optique de type *loi des grands nombres*, on peut écrire

$$\mathbf{P}(S_n \geq nam) = \mathbf{P} \left[\frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n} \geq n \left(am - \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n} \right) \right] \leq \mathbf{P} \left[\left| \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n} \right| \geq n \left(am - \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n} \right) \right].$$

Or, $am - \frac{\mathbf{E}(S_n)}{n} \simeq (a-1)m > 0$ et, si l'on pouvait appliquer la loi des grands nombres (ce qui n'est pas le cas dans le cadre du programme qui traite des suites de v.a.i.i.d. et non des chaînes de Markov), elle donnerait bien le fait que la probabilité $\mathbf{P}(S_n \geq nam)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Toutefois, la technique utilisée dans la

partie III.D relève des *grandes déviations*, et donne une convergence géométrique, ce qui est beaucoup plus fort.

III.E. Application numérique

Q 39. Par définition, $\lambda^*(x_i) = \sup_{t \geq 0} (tx_i - \lambda(t))$. Dans la mesure où l'on dispose des valeurs approchées $\hat{\lambda}(t_j)$ de $\lambda(t_j)$ pour un certain nombre de valeurs positives t_j , le plus naturel que l'on puisse faire de prime abord est de prendre $\max_{1 \leq j \leq K} (tx_i - \hat{\lambda}(t_j))$ comme approximation de $\lambda^*(x_i)$.

Il serait toutefois prudent de vérifier que cette approximation est bien numériquement pertinente en évaluant la marge d'erreur commise sur les $\lambda(t_j)$ (par exemple en évaluant la deuxième valeur propre en module de $A(t)$) et en étudiant la fonction $\lambda(t)$, ce qui permettrait par exemple de choisir intelligemment les valeurs de t_j . En l'absence d'étude supplémentaire, $\lambda^*(x_i)$ apparaît certes ainsi comme une « valeur approchée raisonnable », mais à laquelle il n'est peut-être pas très raisonnable de se fier.

Q 40. La valeur de m correspond au seuil à partir duquel λ^* commence à prendre des valeurs non nulles. Les valeurs numériques permettent de penser que l'on a $4,70 \leq m \leq 4,75$, les évaluations de l'ordre de 10^{-12} correspondant à du bruit numérique. Pour $a = 1,1$, on a l'encadrement $5,17 \leq am \leq 5,225$ et le tableau donne $\lambda^*(am) \gtrsim 4,1 \cdot 10^{-2}$ (il est clair que λ^* est croissante). Considérant que ε est arbitrairement petit, on peut prendre $h = 4,1 \cdot 10^{-2}$ (ou éventuellement $4,3 \cdot 10^{-2}$ en interpolant).