Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2022, filière PSI.

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Préambule extrait de ce que j'ai écrit dans la fiche de contrôle pour l'UPS - ce préambule n'engage que moi.
Il s'agît d'une épreuve totalement inadaptée à la filière PSI.
Contrairement à ce que semble penser le concepteur du sujet, le théorème de Bolzano Weierstrass n'est pas au programme de la filière et il ne s'agît donc pas d'un rappel comme indiqué dans le préambule du sujet. Sachant que ce théorème est utilisé de façon cruciale dans les questions (5), (8), (18) et (23), ce « rappel » est très discutable. Une fois de plus, une fois de trop, ceci encourage les enseignants à traiter des pans entiers hors-programme alors que le programme est déjà très chargé. Comment espérer qu'un candidat maîtrise les techniques d'extraction de sous-suites s'il découvre Bolzano-Weierstrass le jour du concours ? De même, la convexité géométrique au programme de PSI se résume à la définition et au fait que les boules sont convexes. Il est totalement déraisonnable de faire commencer le sujet, en une seule question sans indication, par la démonstration du théorème de projection sur les convexes fermés...puis d'enchaîner avec Hahn-Banach géométrique et la séparation des convexes disjoints (questions (6) et (7)), l'existence d'hyperplan d'appui (question (8)), les enveloppes convexes et l'extrémalité (partie II) et la dualité convexe (début de la partie III) : autrement dit, 18 questions sur 26 portent sur une notion qui est à peine effleurée dans le programme de cette filière, certaines utilisant de façon cruciale un théorème hors-programme.
Je ne vois aucune qualité à ce sujet en tant qu'épreuve de concours de la filière PSI : bien trop long, bien trop difficile (j'ai dénombré au moins 9 questions totalement infaisables par l'immense majorité des candidats), à l'extrême frontière du programme et à des années-lumières de l'esprit de la filière PSI. C'est bien dommage car ce sont de belles mathématiques qui auraient du donner lieu à un sujet beaucoup plus raisonnable s'il avait été conçu avec un minimum de discernement. Venant après l'épreuve Maths I des Mines elle aussi complètement délirante et l'épreuve Maths II des Mines très discutable sur le plan mathématique, on peut dire que la filière PSI est très malmenée en mathématique en ce début de session 2022 ! On voudrait que les étudiants de cette filière consacrent toute leur énergie sur la physique et les SI que l'on ne s'y prendrait pas autrement !
Il faudrait à force que cette seule épreuve de Mathématiques X/ENS filière PSI soit conçue en tenant compte de l'esprit du programme officiel et du profil des étudiants de cette filière ! Ne pas oublier que nombre d'entre eux viennent de PCSI en première année !!

Partie I : Projection et séparation

1. Soient $y_0 \in C$ fixé et $r = \|x - y_0\|$. Notons $\overline{B}(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. On a d'une part

$$\inf_{y\in C} \|x-y\|^2 = \inf_{y\in C\cap\overline{B}(x,r)} \|x-y\|^2.$$

D'autre, $K = C \cap \overline{B}(x,r)$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^d$ et la fonction

$$y \mapsto \|x-y\|^2$$

et continue sur K. D'après <u>le théorème des bornes atteintes</u>, cette fonction est minorée et atteint sa borne inférieure m. Il $\boxed{\text{existe}}$ donc $y \in K \subset C$ tel que

$$\forall z \in C,\ m = \|x-y\|^2 \leq \|x-z\|^2.$$

Montrons l'unicité d'un tel y. Soient $y_1, y_2 \in C$ vérifiant $m = \|x-y_1\|^2 = \|x-y_2\|^2$. Comme $\dfrac{y_1+y_2}{2} \in C$, on a

$$m \leq \left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 = \|x-y_1\|^2 + (x-y_1)\cdot(y_1-y_2) + \frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2$$

et donc
$$0 \leq (x-y_1)\cdot(y_1-y_2)+\frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2.$$
En échangeant les rôles de y_1 et y_2, il vient
$$0 \leq (x-y_2)\cdot(y_2-y_1)+\frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2.$$
En sommant ces deux inégalités, on en déduit que
$$0 \leq -\|y_1-y_2\|^2+\frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2 = -\frac{3}{4}\|y_1-y_2\|^2.$$
On en déduit que $\|y_1-y_2\|^2 \leq 0$ et donc que $\boxed{y_1=y_2}$.
L'unicité montre de suite l'équivalence
$$x = \mathrm{proj}_C(x) \Leftrightarrow x \in C.$$

2. Supposons $y = \mathrm{proj}_C(x)$. On a de suite $\boxed{y \in C}$. De plus,
$$\forall z \in C, y+t(z-y) \in C \text{ et } \|x-y-t(z-y)\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$
Cette inégalité s'écrit
$$-2t(x-y)\cdot(z-y)+t^2\|z-y\|^2 \geq 0.$$
En divisant par $2t > 0$ puis en faisant tendre t vers 0, on en déduit
$$\boxed{(x-y)\cdot(z-y) \leq 0}.$$
Supposons $y \in C$ et $(x-y)\cdot(z-y) \leq 0$ pour tout $z \in C$. Afin de montrer que $y = \mathrm{proj}_C(x)$, il suffit de montrer que
$$\forall z \in C, \|x-z\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$
Or,
$$\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2+2(x-y)\cdot(y-z)+\|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2+0+0 = \|x-y\|^2.$$

3. En appliquant ce qui précède à $x = x_1$, $y = \mathrm{proj}_C(x_1)$ et $z = \mathrm{proj}_C(x_2)$, il vient
$$(x_1-\mathrm{proj}_C(x_1))\cdot(\mathrm{proj}_C(x_2)-\mathrm{proj}_C(x_1)) \leq 0.$$
En échangeant les rôles des indices,
$$(x_2-\mathrm{proj}_C(x_2))\cdot(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)) \leq 0.$$
En sommant ces deux inégalités, il vient
$$(\mathrm{proj}_C(x_1)-x_1+x_2-\mathrm{proj}_C(x_2))\cdot(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)) \leq 0$$
soit encore
$$(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2))\cdot(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2))-(x_1-x_2)\cdot(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)) \leq 0$$
et enfin
$$\boxed{\|\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)\|^2 \leq (x_1-x_2)\cdot(\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2))}.$$
A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que
$$\|\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)\|^2 \leq \|x_1-x_2\| \times \|\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)\|.$$
Si $\mathrm{proj}_C(x_1) \neq \mathrm{proj}_C(x_2)$, on en déduit que
$$\|\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)\| \leq \|x_1-x_2\|.$$
Cette inégalité étant encore vraie si $\mathrm{proj}_C(x_1) = \mathrm{proj}_C(x_2)$, on en déduit finalement que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,
$$\|\mathrm{proj}_C(x_1)-\mathrm{proj}_C(x_2)\| \leq \|x_1-x_2\|.$$
La fonction proj_C est donc 1-lipschitzienne et donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}^d}$.

4. (i) Pour $C = \mathbb{R}_+^d$, on a

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{proj}_C(x_1,\dots,x_d) = \big(\max(x_1,0),\dots,\max(x_d,0)\big)}.$$

(ii) Pour $C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y\| \le 1\}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{proj}_C(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \in C \\ x/\|x\| \text{ si } x \notin C \end{array} \right. .}$$

(iii) Pour $C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d y_i \le 1\}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{proj}_C(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ si } x \in C \\ x - \dfrac{-1+\sum_{i=1}^d x_i}{n}(1,\dots,1) \text{ si } x \notin C \end{array} \right. .}$$

(iv) Pour $C = [-1,1]^d$, on a

$$\boxed{\forall (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{proj}_C(x_1,\dots,x_d) = (y_1,\dots,y_d) \text{ avec } \forall i \in [\![1,d]\!],\ y_i = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ si } x_i \le -1 \\ x_i \text{ si } |x_i| \le 1 \\ 1 \text{ si } x_i \ge 1 \end{array} \right. .}.$$

Commentaire : dans la mesure où l'énoncé ne donne pas ces formules, je pense que leur simple expression suffit au correcteur et qu'il est inutile de passer trop de temps à les justifier plus ou moins laborieusement. Un dessin pour $d = 2$ est bien sûr une bonne idée afin d'accompagner ces expressions.

5. Comme D et C sont convexes, pour tout $d_1 - c_1, d_2 - c_2 \in D - C$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$t(d_1 - c_1) + (1-t)(d_2 - c_2) = \big(td_1 + (1-t)d_2\big) - \big(tc_1 + (1-t)c_2\big) \in D - C$$

donc $\boxed{D - C \text{ est convexe}}$.
Soit $(d_n - c_n)_{n\ge 0}$ une suite à valeurs dans $D - C$, convergeant vers $x \in \mathbb{R}^d$. Comme C est fermée et bornée, la suite (c_n) possède une suite extraite $(c_{\sigma(n)})$ convergeant vers une limite $c \in C$. Par somme de limites, la suite $(d_{\sigma(n)})$ converge vers $x + c$ et D étant fermée, $x + c \in D$. Il existe donc $d \in D$ tel que $x = d - c$, ce qui montre que $x \in D - C$ et par suite que $\boxed{D - C \text{ est fermée}}$.
Enfin, on a de suite

$$\boxed{C \cap D \neq \emptyset \Rightarrow 0 \notin D - C}.$$

6. Notons $p = \mathrm{proj}_{D-C}(0)$. Comme $0 \notin D - C$, on a $p \neq 0$ et d'après (2) :

$$\forall y - x \in D - C,\ (y - x - p) \cdot (-p) \le 0.$$

Ceci s'écrit encore

$$\boxed{\forall (x,y) \in C \times D,\ p \cdot x \le p \cdot y - \|p\|^2}$$

ce qui donne le résultat avec $\varepsilon = \|p\|^2 > 0$.
Remarquons que si l'on pose $\alpha = \sup\limits_{x \in C} p \cdot x$, on déduit de cette inégalité que

$$\forall (x,y) \in C \times D, p \cdot x \le \alpha < \alpha + \varepsilon \le p \cdot y.$$

7. L'inclusion

$$C \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d,\ p \cdot x \le \sigma_C(p)\}$$

découle de la définition de σ_C.
Réciproquement, soit $y \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{R}^d,\ p \cdot y \le \sigma_C(p).$$

Supposons par l'absurde que $y \notin C$ et posons $D = \{y\}$. La partie D est fermée et bornée, on peut donc appliquer (5) en échangeant les rôles de C et D (*maladresse d'énoncé qui aurait pu supposer*

C ou D borné dans (5) au lieu d'imposer que ce soit C) afin de montrer que $D - C$ est fermée, convexe et ne contient pas 0. On en déduit à l'aide de (6) qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in C,\, p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in C$, on en déduit que pour ce p, $\sigma_C(p)$ est finie et

$$\sigma_C(p) \leq p \cdot y - \varepsilon \leq \sigma_C(p) - \varepsilon,$$

ce qui est absurde ! On a donc montré que

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d,\, p \cdot x \leq \sigma_C(p)\} \subset C$$

et donc que

$$\boxed{C = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d,\, p \cdot x \leq \sigma_C(p)\}}.$$

8. Commençons par remarquer que $\overline{A}$ est convexe et fermé. Si $x \notin \overline{A}$, le résultat découle de (6) avec $C = \{x\}$ et $D = \overline{A}$.
Supposons dorénavant que $x \in \overline{A}$. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}$ convergeant vers x. En appliquant ce qui précède à x_n, il existe $p_n \neq 0$, que l'on peut supposer de norme 1 tel que

$$\forall y \in A,\, p_n \cdot x_n \leq p_n \cdot y.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite (p_n) converge vers p, de norme 1. En passant à la limite, on en déduit que

$$\forall y \in A,\, p \cdot x \leq p \cdot y.$$

Partie II. Points extrémaux

9. On raisonne par récurrence sur I. Il n'y a rien à dire pour $I = 1$. Soit I fixé quelconque. On suppose le résultat vrai au rang I. Pour $x_1, \ldots, x_{I+1} \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{I+1}$ positifs de somme 1 avec $\lambda_{I+1} \neq 1$, on écrit

$$\sum_{i=1}^{I+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{I+1}) \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{I+1}} x_i + \lambda_{I+1} x_{I+1} \in A$$

par hypothèse de récurrence et convexité de A puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{I+1}} = 1$.

Et si, en supposant $\lambda_i > 0$ pour tout i et

$$x = \sum_{i=1}^{I+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{I+1}) \sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{I+1}} x_i + \lambda_{I+1} x_{I+1} \in \mathrm{Ext}(A),$$

alors $x_{I+1} = x$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{I} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{I+1}} x_i = x$, ce qui à nouveau par hypothèse de récurrence donne $x_i = x$ pour tout $i \leq I$ et donc pour tout $i \leq I + 1$.

10. Il est évident que $\mathrm{co}(E)$ contient E. Puis en écrivant

$$t \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i + (1 - t) \sum_{j=1}^{J} \mu_j y_j = \sum_{i=1}^{I} t \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{J} (1 - t) \mu_j y_y,$$

on voit de suite que $\mathrm{co}(E)$ est convexe. Et d'après la question précédente, tout convexe contenant E contient $\mathrm{co}(E)$. Ainsi, $\boxed{\text{co}(E) \text{ est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant } E}$.

Soit enfin $x \in \mathrm{Ext}(\mathrm{co}(E))$. Comme $x \in \mathrm{co}(E)$, on peut écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i$ avec $x_i \in E$ et $\lambda_i > 0$.

Mais comme $E \subset \mathrm{co}(E)$, chaque x_i appartient à $\mathrm{co}(E)$ et par extrémalité de x, $x = x_i$ pour tout i et $x \in E$. On a donc bien $\boxed{\mathrm{Ext}(\mathrm{co}(E)) \subset E}$.

11. Un joli dessin laissé au lecteur permet de voir que que $\boxed{\mathrm{Ext}(A) = E \setminus \{(0,0,0)\}}$, qui est non vide et non fermé ($(0,0,0) \in \overline{\mathrm{Ext}(A)} \setminus \mathrm{Ext}(A)$).

12. La partie A est une intersection de convexes fermés (comme images réciproques des intervalles fermés $]-\infty, b_i]$ par les applications continues $x \mapsto p_i \cdot x$) donc est $\boxed{\text{un convexe fermé}}$.
Supposons $\underline{\mathrm{rang}\big(\{p_i, i \in I(x)\}\big) = r < d}$. Quitte à ré-ordonner les p_i, on peut supposer que la famille $(p_1, \dots, p_r)$ est une base de $\mathrm{Vect}(p_i, i \in I(x))$. Soit $y \in \big(\mathrm{Vect}(p_1, \dots, p_r)\big)^{\perp} \setminus \{0\}$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ petit, le segment $[x - \varepsilon y, x + \varepsilon y]$ est inclus dans A, ce qui montre que $\underline{x \text{ n'est pas extrémal}}$.
Supposons $\underline{\mathrm{rang}\big(\{p_i, i \in I(x)\}\big) = d}$. Quitte à ré-ordonner les p_i, on peut supposer que la famille $(p_1, \dots, p_r)$ est une base de $\mathrm{Vect}(p_i, i \in I(x))$. Supposons $x = (1-\lambda)y + \lambda z$ avec $y, z \in A$, $\lambda \in]0,1[$. On a alors pour $i \in [\![1, d]\!]$,

$$b_i = p_i \cdot ((1-\lambda)y + \lambda z) = p_i \cdot (1-\lambda)y + p_i \cdot \lambda z \leq (1-\lambda)b_i + \lambda b_i = b_i.$$

On en déduit que $p_i \cdot y = p_i \cdot z = b_i$ donc $p_i \cdot (y - z) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $y - z \in (\mathbb{R}^d)^{\perp} = \{0\}$. On a donc $y = z = x$ et $\underline{x \text{ est bien extrémal}}$.

Afin d'estimer le nombre de points extrémaux de A remarquons que si x et y sont deux points extrémaux tels que $I(x) = I(y)$, alors $\{p_i, i \in I(x)\} = \{p_i, i \in I(y)\}$ contient une base de $\mathbb{R}^d$, que l'on peut supposer être égal à $(p_1, \dots, p_d)$. Mais on a alors

$$x = \sum_{i=1}^{d} (p_i \cdot x) p_i = \sum_{i=1}^{d} b_i p_i = \sum_{i=1}^{d} (p_i \cdot y) p_i = y.$$

L'application $x \mapsto I(x)$ est donc injective et le nombre de points extrémaux de A est donc inférieur ou égal au nombre de parties de $[\![1, k]\!]$: $\boxed{\mathrm{card}(\mathrm{Ext}(A)) \leq 2^k}$.

13. Soit la fonction $y \in K \mapsto p \cdot y \in \mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur le compact non vide K donc y atteint sa borne inférieure m. On en déduit que

$$\boxed{K_p = \{x \in K \mid \forall y \in K, p \cdot x \leq p \cdot y\} = \{x \in K \mid p \cdot x = m\} \neq \emptyset}.$$

En écrivant

$$K_p = K \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid p \cdot x = m\},$$

K_p est l'intersection de deux convexes fermés donc est $\boxed{\text{convexe et fermé}}$.
Enfin, si $x \in \mathrm{Ext}(K_p)$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i$$

avec $x_i \in K$ et les $\lambda_i > 0$ de somme 1, on a

$$p \cdot x = m = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i p \cdot x_i \geq \sum_{i=1}^{I} \lambda_i m = m.$$

Ceci implique $p \cdot x_i = m$ pour tout i et donc $x_i \in K_p$. Comme $x \in \mathrm{Ext}(K_p)$, on en déduit que $x = x_i$ pour tout i. On a bien montré que $\boxed{\mathrm{Ext}(K_p) \subset \mathrm{Ext}(K)}$.

14. La convexité et l'extrémalité étant des notions invariantes par translation, on a $\mathrm{Ext}(A - a) = \mathrm{Ext}(A) - a$ pour toute partie convexe non vide A. On peut donc supposer que $0 \in K$.
Si $\dim(K) = 0$, alors $K = \{0\}$ et $\mathrm{Ext}(K) = \{0\} \neq \emptyset$.
On raisonne ensuite par récurrence sur $n = \dim(K)$. Soit $V_K = \mathrm{Vect}(K)$. Soit

$$H_p = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p \cdot x = 0\}$$

un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas V_K. Ainsi, $H_p \cap V_K$ est un hyperplan de H_p. Soient alors comme précédemment $m = \inf\limits_{y \in K} (p \cdot y)$ et $K_p = \{x \in K \mid p \cdot x = m\}$.
Si $K_p = K$, alors $m = 0$ et $K \subset V_K \subset H_p$, ce qui est exclu. Si $a \in K_p$ est fixé, alors $K_p - a \subset$

$H_p \cap V_K$ et $\dim(K_p - a) \leq \dim(K) - 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire que $\mathrm{Ext}(K_p - a) \neq \emptyset$. On en déduit que $\mathrm{Ext}(K_p) \neq \emptyset$ et d'après (13) que $\boxed{\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset}$.

15. Comme $\mathrm{Ext}(K) \subset K$, on a de suite $\boxed{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K)) \subset K}$.
En préambule, remarquons qu'en remplaçant borne inférieure par borne supérieure, en notant

$$K'_p = \{x \in K \mid \forall y \in K, p \cdot x \geq p \cdot y\},$$

on montre de même $\mathrm{Ext}(K'_p) \subset \mathrm{Ext}(K)$.
Ceci étant dit, soit $y \in K$ fixé et $p \in \mathbb{R}^d$ fixé. On a pour tout $x \in K'_p$,

$$p \cdot y \leq p \cdot x.$$

Si $K'_p = K$, $x \mapsto p \cdot x$ est constante sur K donc $p \cdot y = \sup\limits_{x \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext})(K)} p \cdot x$. Sinon, K'_p est de dimension strictement inférieure à celle de K et en raisonnant par récurrence, on a

$$K'_p \subset \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K'_p)) \subset \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$$

et donc

$$p \cdot y \leq \sup_{x \in K'_p} p \cdot x \leq \sup_{x \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} p \cdot x.$$

Dans tous les cas, on a

$$\forall p \in \mathbb{R}^d,\ p \cdot y \leq \sup_{x \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} p \cdot x = \sigma_{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}(p).$$

En utilisant (7), on en déduit que $y \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$. Ceci montre $\boxed{K \subset \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$.
Commentaire : à nouveau une maladresse d'énoncé, il eut été plus naturel d'introduire les K'_p dans (13) plutôt que les K_p dans la perspective d'utiliser (7).

Partie III : Un résultat de dualité

16. Le fait que E^+ et E^{++} soient stables par homothéties positives est évident. Ils sont de plus convexes fermés comme intersection de convexes fermés. L'inclusion $E \subset E^{++}$ est une tautologie.

17. D'après (16), si $E = E^{++}$, alors E est un cône convexe fermé.
Réciproquement, supposons que E est un cône convexe fermé et montrons que $E^{++} \subset E$. D'après (7),

$$-E = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d, p \cdot y \leq \sigma_{-E}(p)\}.$$

Or, pour $p \in \mathbb{R}^d$, or

$$\sigma_{-E}(p) = 0 \text{ si } p \in E^+, \sigma_{-E}(p) = +\infty \text{ sinon.}$$

Or, si $x \in -E^{++}$, on a $p \cdot (-x) \leq 0 = \sigma_{-E}(p)$ pour $p \in E^+$ et $p \cdot (-x) \leq +\infty$ sinon. On en déduit que

$$-x \in \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d, p \cdot y \leq \sigma_{-E}(p)\} = -E$$

et donc $x \in E$. On a bien montré $\boxed{E^{++} \subset E}$ et donc $\boxed{E = E^{++}}$.

18. Il est évident que F est un cône convexe. Afin de montrer que F est fermé, on raisonne par récurrence sur k, le cas $k = 1$ étant immédiat.
Soit donc

$$F_{k+1} = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \xi_i, (\lambda_1, \ldots \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}_+^{k+1} \right\}.$$

On peut bien sûr supposer

$$\xi_{k+1} \notin F_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i, (\lambda_1, \ldots \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^{k} \right\}$$

car sinon $F_{k+1} = F_k$.
Soit (x_n) une suite à valeurs dans F_{k+1}, convergeant vers $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout n, écrivons

$$x_n = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{i,n}\xi_i \text{ avec } (\lambda_{1,n}, \dots \lambda_{k+1,n}) \in \mathbb{R}_+^{k+1}.$$

Si l'une des suites $(\lambda_{i,n})_{n\geq 0}$, par exemple la suite $(\lambda_{k+1,n})_{n\geq 0}$, est bornée, alors quitte à extraire, on peut supposer que

$$\lambda_{k+1,n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^+.$$

Alors,

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i,n}\xi_i \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} y = x - \lambda_{k+1}\xi_{k+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $y \in F_k$ donc $x \in F_{k+1}$.
Si aucune des suites $(\lambda_{i,n})_{n\geq 0}$ n'est bornée, la suite $(\lambda_{k+1,n})_{n\geq 0}$ n'est pas bornée, et quitte à extraire, on peut supposer que

$$\lambda_{k+1,n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Alors,

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{k+1,n}}\xi_i = \frac{1}{\lambda_{k+1,n}}\left(x - \lambda_{k+1,n}\xi_{k+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -\xi_{k+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $-\xi_{k+1} \in F_k \in F_{k+1}$ et de la même façon, $-\xi_i \in F_{k+1}$ pour tout i. Ainsi, F_{k+1} contient tous les ξ_i et tous les $-\xi_i$, donc $F_{k+1} = \mathrm{Vect}(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ et F_{k+1} est fermé comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

Commentaire : d'après le théorème de Carathéodory, F peut s'écrire comme union finie de cônes simpliciaux (situation où les ξ_i forment une famille libre) et il est très facile de montrer qu'un cône simplicial est fermé. On en déduit alors que F est fermé comme union finie de fermés.

Montrons finalement l'équivalence demandée.

Si $\xi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\xi_i \in F$ avec $\lambda_i \geq 0$, soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\xi_i \cdot x \geq 0$ pour tout i. Alors

$$\xi \cdot x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\xi_i \cdot x \geq 0.$$

Réciproquement, soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \big(\forall i,\ \xi_i \cdot x \geq 0 \Rightarrow \xi \cdot x \geq 0\big).$$

Soit $x \in F^+$ fixé quelconque. Comme $\xi_i \in F$ pour tout i, on a bien $\xi_i \cdot x \geq 0$. On a donc $\xi \cdot x \geq 0$. Ceci montre que $\xi \in F^{++}$. D'après (17), $\xi \in F$.

19. Il s'agît de montrer que

$$p \cdot x \geq b \cdot q$$

pour tout p, x, b, q vérifiant les inégalités de l'énoncé. Comme $M^T q \leq p$, on a pour tout i,

$$\sum_j m_{ji}q_j \leq p_i.$$

Comme $x \geq 0$, on en déduit que

$$\sum_{i,j} m_{ji}q_jx_i \leq \sum_i p_ix_i.$$

Comme $Mx \leq b$, on a pour tout k

$$\sum_l m_{kl}x_l \leq b_k.$$

Comme $q \leq 0$, on en déduit que

$$\sum_{k,l} m_{kl} x_l q_k \geq \sum_k b_k q_k.$$

On a donc bien

$$b \cdot q = \sum_k b_k q_k \leq \sum_{k,l} m_{kl} x_l q_k = \sum_{i,j} m_{ji} q_j x_i \leq \sum_i p_i x_i = p \cdot x.$$

Et donc $\boxed{\beta \leq \alpha}$.

20. a) Avec les hypothèses faites, on a pour $\lambda > 0$ assez grand :

$$z + \lambda \overline{x} \geq 0 \text{ et } M(z + \lambda \overline{x}) \leq \lambda b.$$

On a donc pour de tels λ,

$$p \cdot \frac{z + \lambda \overline{x}}{\lambda} \geq \alpha = p \cdot \overline{x}.$$

On en déduit $\boxed{p \cdot z \geq 0}$.

b) Considérons la famille de vecteurs formée des e_j (vecteurs de la base canonique) avec $j \in I$ et des vecteurs $-M_i$ avec $i \in I$. D'après (a) et la question (18), le vecteur p appartient au cône engendré par ces vecteurs. Il existe donc des $\lambda_j \geq 0$ et des $\mu_i \geq 0$ tels que

$$p = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j - \sum_{i \in I} \mu_i M_i.$$

Soit alors $\overline{q}$ le vecteur dont les coordonnées $(q_1, \ldots, q_k)$ sont définies ainsi :

$$\boxed{q_i = -\mu_i \text{ si } i \in I \text{ et } q_i = 0 \text{ sinon}}.$$

Une fois que l'on a remarqué que par construction,

$$-\sum_{i \in I} \mu_i M_i = M^T \overline{q},$$

le fait que $\overline{q}$ convienne est une vérification facile laissée au lecteur.

c) Si $\overline{q}$ est le vecteur construit en (b), on a

$$\beta \geq b \cdot \overline{q} = M\overline{x} \cdot \overline{q} = \overline{x} \cdot M^T \overline{q} = \overline{x} \cdot p = \alpha \underset{(19)}{\geq} \beta$$

donc

$$\boxed{b \cdot \overline{q} = \alpha = \beta}.$$

Partie IV : Systèmes linéaires sous-déterminés

21. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Soit y tel que $\|y\|_\infty \leq 1$. Alors,

$$x \cdot y \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i||y_i| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \leq \|x\|_1.$$

Il y a de plus égalité si et seulement si $y = (y_1, \ldots, y_d)$ avec $y_i = x_i/|x_i|$ si $x_i \neq 0$ et y_i quelconque si $x_i = 0$. On a donc bien

$$\|x\|_1 = \max\{x \cdot y \mid y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_\infty \leq 1\}.$$

De même, si $\|y\|_1 \leq 1$,

$$x \cdot y \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 \leq \|x\|_\infty$$

avec égalité si $y_i = x_i/|x_i|$ pour un (seul) indice i tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$. On a donc bien

$$\|x\|_\infty = \max\{x \cdot y \mid y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_1 \leq 1\}.$$

22. A ce stade du corrigé, j'estime raisonnable d'affirmer que le fait que $\boxed{C \text{ soit fermé et borné}}$ est évident (intersection d'un hyperplan affine et de la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_1$).
Comme M est de rang k et de taille (k,d), $\mathrm{Im}(M) = \mathbb{R}^k$. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $Mx_0 = b$. Soit

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Mx = b \text{ et } \|x\|_1 \leq \|x_0\|\}.$$

L'ensemble K est une partie non vide, fermée et bornée, incluse dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (car $b \neq 0$). La fonction $x \mapsto \|x\|_1$ est continue sur K donc y est minorée et atteint sa borne inférieure

$$r = \inf\{\|x\|_1 \mid x \in \mathbb{R}^d, Mx = b\} = \inf\{\|x\|_1 \mid x \in K, Mx = b\} > 0.$$

Ceci montre que $\boxed{C \neq \emptyset}$.
Montrons enfin que C est convexe : soient $x, y \in C$. Pour $t \in [0,1]$, on a

$$M(tx + (1-t)y) = tb + (1-t)b = b$$

et par l'inégalité triangulaire,

$$r \leq \|tx + (1-t)y\|_1 \leq r$$

donc $\|tx + (1-t)y\|_1 = r$ et $tx + (1-t)y \in C$. Donc $\boxed{C \text{ est convexe}}$.

23. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 \leq \|\overline{x}\| - 1/n\}$$

et $D = \overline{x} + \mathrm{Ker}(M)$. Par définition de $\overline{x}$, C_n et D sont deux parties convexes fermées non vides disjointes. D'après (6), il existe p_n et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall y \in C_n, \forall a \in \mathrm{Ker}(M),\ p_n \cdot y \leq p_n \cdot \overline{x} + p_n \cdot a - \varepsilon.$$

En passant au max en y, on en déduit que

$$\|p_n\|_\infty(\|\overline{x}\|_1 - 1/n) \leq p_n \cdot \overline{x} + p_n \cdot a - \varepsilon.$$

En changeant a en ta pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque, on déduit de cette inégalité que $p_n \cdot a = 0$ et donc que $p_n \in \mathrm{Ker}(M)^\perp$. Et aussi que

$$\|p_n\|_\infty(\|\overline{x}\|_1 - 1/n) \leq p_n \cdot \overline{x} - \varepsilon.$$

Ceci montre aussi que $p_n \neq 0$ et en posant $q_n = p_n/\|p_n\|_\infty$, on obtient

$$\|\overline{x}\|_1 - 1/n \leq q_n \cdot \overline{x}.$$

En extrayant de la suite (q_n) une sous-suite convergente, on obtient un vecteur q tel que $\|q\|_\infty = 1$, $q \in \mathrm{Ker}(M)^\perp \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\|\overline{x}\|_1 \leq q \cdot \overline{x}.$$

On a donc en fait $\|\overline{x}\|_1 = q \cdot \overline{x}$ et $q = (q_1, \ldots, q_d)$ avec $q_i = \overline{x_i}/|\overline{x_i}|$ si $\overline{x_i} \neq 0$. Ce qui peut s'écrire $q_i\overline{x_i} = |\overline{x_i}|$.
Commentaire : à nouveau une question terriblement difficile ! Pourquoi, dans cette question comme dans plein d'autres de ce sujet, ne pas donner une indication ?

24. On a $\overline{x} \in K$ donc K est non vide.
Soit $y \in K$. Avec les hypothèses faites, en supposant $\|q\|_\infty = 1$, on a pour $i \notin I_0(\overline{x})$, $q_i = \mathrm{signe}(x_i)$ et

$$\|y\|_1 = \sum_{i \notin I_0(\overline{x})} |y_i| = \sum_{i=1}^{d} y_i q_i = y \cdot q.$$

Comme $y - \overline{x} \in \mathrm{Ker}(M)$, on a $(y - \overline{x}) \cdot q = 0$ et donc

$$\|y\|_1 = \overline{x} \cdot q = \|x\|_1.$$

On a donc bien $y \in C$ et donc $\boxed{K \subset C}$.

25. Pour $\varepsilon > 0$ petit et $i \notin I_0(y)$, $y_i \pm \varepsilon h_i$ est de même signe que y_i donc $q_i(y_i \pm \varepsilon h_i) \geq 0$. Et pour $i \in I_0(y)$, $q_i(y_i \pm \varepsilon h_i) = 0$. De plus $I_0(\overline{x}) \subset I_0(y) \subset I_0(y \pm \varepsilon h)$ et $M(y \pm \varepsilon h) = b$. Tout ceci montre que $y \pm \varepsilon h \in K$ et comme

$$y = \frac{1}{2}\big((y - \varepsilon h) + (y + \varepsilon h)\big) \in \mathrm{Ext}(K),$$

on en déduit que $\boxed{h = 0}$.

26. Commençons par remarquer que l'existence de $y \in \mathrm{Ex}(K)$ vient de (14).
Par l'absurde, supposons $\mathrm{card}(I_+(y) \cup I_-(y)) \geq k + 1$, alors $\mathrm{card}(I_0(y)) \leq d - k - 1$. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$V = \{h \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in [\![1, d]\!],\ i \in I_0(y) \Rightarrow x_i = 0\} = \{h \in \mathbb{R}^d \mid I_0(y) \subset I_0(h)\}.$$

On a $\dim(V) = d - \mathrm{card}(I_0(y)) \geq k + 1$. Par le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}(M) = d - k$. On en déduit que

$$\dim(V) + \dim \mathrm{Ker}(M) \geq d + 1$$

et donc que $V \cap \mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$, ce qui contredit (25).