CAPES interne de Mathématiques
session 1999
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint99comp2e]

ANNEXE (pour le second exercice)

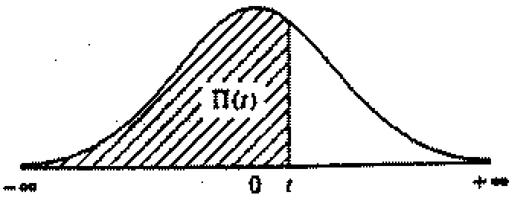
Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Pi(t) = \mathrm{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3.0	3.1	3,2	3,3	3,4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$

pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$

PREMIER EXERCICE

Cet exercice comporte quatre parties indépendantes.

I. Trois cercles de même rayon

On considère dans un plan (P) trois cercles (C_1), (C_2) et (C_3), de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 ayant tous les trois le même rayon R et passant par un même point M. Les cercles (C_1) et (C_2) se recoupent en A_3, (C_2) et (C_3) en A_1, (C_3) et (C_1) en A_2.

I.1. Donner la liste des losanges contenus dans la configuration formée par les sept points $M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$.

I.2. Montrer qu'il existe un unique point I tel que les huit points $I, M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$ soient les images des sommets d'un parallélépipède par une projection orthogonale sur le plan (P).

I.3. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$? Quel est son rayon ? Quel est l'orthocentre du triangle $A_1 A_2 A_3$?

I.4. Les huit points $I, M, O_1, O_2, O_3, A_1, A_2, A_3$ peuvent-ils être les images des sommets d'un cube par une projection orthogonale sur le plan (P) ?

II. Quatre cercles de même rayon

On considère maintenant dans le plan (P) quatre cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4), de centres respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4 ayant tous le même rayon R et passant par un même point M. Les cercles (C_1) et (C_2) se recoupent en B_1, (C_2) et (C_3) en B_2, (C_3) et (C_4) en B_3, (C_4) et (C_1) en B_4.

II.1. Montrer que $B_1 B_2 B_3 B_4$ est un parallélogramme.

II.2. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un losange ?

II.3. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un rectangle ?

II.4. Comment choisir O_1, O_2, O_3 et O_4 pour que $B_1 B_2 B_3 B_4$ soit un carré ?

III. Sur l'hyperbole équilatère

On considère dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'hyperbole équilatère (H) d'équation $y = \frac{k}{x}$ où k est un réel strictement positif donné.

III.1. Une droite coupant (H) en deux points A et B coupe les axes de l'hyperbole en P et Q. Démontrer la propriété classique suivante : les segments [AB] et [PQ] ont même milieu I. En déduire que les bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et (OI) sont parallèles aux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

III.2. Soit A′ le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les bissectrices de l'angle formé par les droites (AB) et (A′B) sont parallèles aux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

III.3. Soit C un autre point de (H). Prouver que $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2\,(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$.

III.4. Réciproquement, soit trois points fixes A, A′, B non alignés. On suppose $AB \neq A'B$. Quel est l'ensemble des points C tels que $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2\,(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$?

Tournez la page S.V.P.

IV. Une réciproque à la deuxième partie

IV.1. Soit A, A', B trois points donnés, non alignés. On suppose $AB \neq A'B$. Deux cercles de même rayon R variable, l'un passant par A et B, l'autre passant par A' et B se recoupent en un point M. Comparer les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'B})$. En déduire que l'ensemble des points M, lorsque R varie, est inclus dans une hyperbole équilatère que l'on précisera.

IV.2. On donne deux droites sécantes (D) et (D') et un point B qui n'est situé ni sur ces droites ni sur leurs bissectrices. Un cercle de centre B, de rayon variable R, coupe (D) en P et Q et coupe (D') en P' et Q'. Montrer que les milieux des segments [PP'], [PQ'], [QP'] et [QQ'] sont sur l'hyperbole équilatère passant par B, K, K' où K et K' sont les projetés orthogonaux de B sur (D) et (D'), dont le centre est le milieu de [KK'] et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle formé par (D) et (D').

IV.3. On considère un parallélogramme $B_1 B_2 B_3 B_4$. Montrer que s'il existe des points O_1, O_2, O_3, O_4 et M tels que $MO_1B_1O_2$, $MO_2B_2O_3$, $MO_3B_3O_4$ soient des losanges, alors $MO_4B_4O_1$ est aussi un losange.

IV.4. Un parallélogramme $B_1 B_2 B_3 B_4$ étant donné, quel est l'ensemble des points M pour lesquels il existe quatre cercles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) de même rayon R tels que (C_1) et (C_2) passent par M et B_1, (C_2) et (C_3) passent par M et B_2, (C_3) et (C_4) passent par M et B_3 et (C_4) et (C_1) passent par M et B_4 ?

SECOND EXERCICE

L'exercice consiste à donner un sens précis à la phrase suivante, extraite du paragraphe « Probabilités » du programme de la classe de Première S :

« Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois ».

et à l'illustrer d'un exemple numérique.

1. Soit une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ représentée par un univers Ω, ensemble des événements élémentaires. On s'intéresse à un événement $\mathscr{A}$, issue possible de cette expérience, représenté par la partie A de Ω, de probabilité inconnue $p = \mathrm{P}(\mathrm{A})$. On supposera A distincte de Ω et non vide et on notera $q = 1 - p$.

   Soit X_0 la variable aléatoire définie sur Ω qui prend la valeur 1 si $\mathscr{A}$ est réalisé et 0 sinon.

   Déterminer la loi de probabilité de X_0, son espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{X}_0)$ et sa variance $\mathrm{V}(\mathrm{X}_0)$.

   On désignera la loi de X_0 par $\mathscr{B}(1, p)$.

2. On répète l'expérience aléatoire décrite ci-dessus n fois. À la i-ième épreuve, on associe la variable X_i, de même loi $\mathscr{B}(1, p)$ que X_0. La répétition de ces n épreuves dans les mêmes conditions expérimentales permet de supposer que les variables X_i sont indépendantes.

   a. On pose alors $\mathrm{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$. Que représente la variable aléatoire Y_n ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de Y_n.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$ de la variable aléatoire Y_n.

   [On pourra utiliser les propriétés élémentaires de l'espérance en les énonçant ou introduire la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi_n(x) = (px + q)^n$ et établir que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \varphi_n'(1)$].

   d. Calculer la variance $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n)$ de la variable aléatoire Y_n.

   [On pourra utiliser les propriétés élémentaires de la variance ou montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) = \varphi_n''(1) + \varphi_n'(1)$ et utiliser la formule de König : $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)]^2$].

   On notera désormais $\mathscr{B}(n, p)$ la loi de Y_n.

3. On considère maintenant la variable aléatoire $\mathrm{F}_n = \dfrac{\mathrm{Y}_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$.

   a. Que représente la variable aléatoire F_n ?

   b. Déterminer la loi de F_n, son espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{F}_n)$ et sa variance $\mathrm{V}(\mathrm{F}_n)$.

4. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité $\mathrm{P}(|\mathrm{F}_n - p| \geqslant \varepsilon)$ où ε est un réel strictement positif donné et montrer que cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. (Théorème de Bernoulli).

   Trouver un majorant de cette probabilité qui ne dépende pas de p. [On pourra étudier les variations de la fonction qui à p associe $p(1-p)$].

   Comment interprétez-vous concrètement ce résultat ?

5. On désire estimer la valeur de p à 0,025 près. Combien faut-il faire d'épreuves pour pouvoir proposer un tel encadrement de p, avec un niveau de confiance supérieur à 0,95 (cela signifie que lors de la réalisation de ces n épreuves, la probabilité pour que la variable aléatoire F_n prenne une valeur comprise entre $p - 0{,}025$ et $p + 0{,}025$ est supérieure à 0,95) ?

   Quelle interprétation concrète donneriez-vous à ce résultat ? Quels commentaires ce résultat vous inspire-t-il ?

Tournez la page S.V.P.

6. On désire encadrer p avec autant de précision tout en gardant un bon niveau de confiance, mais de manière plus économique, avec un nombre d'épreuves à réaliser beaucoup plus réduit.

   Pour cela on désigne par Π la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On a le théorème d'approximation normale de la loi binomiale de Moivre-Laplace que l'on admettra :

   Si la loi de la variable aléatoire Y_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors la probabilité que la variable réduite $\dfrac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$ soit comprise dans un intervalle donné $[a, b]$ tend vers $\Pi(b) - \Pi(a)$ quand n tend vers l'infini.

   Pour contrôler les valeurs des probabilités obtenues par cette approximation, on admettra de plus que :

   Si $n > 1\,000$ et si p et q ne sont pas trop voisins de 0 (en pratique dès que $np > 5$ et $nq > 5$), l'erreur commise dans le calcul de la probabilité que $\dfrac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$ soit compris dans un intervalle donné $[a, b]$ est alors inférieure à 10^{-2}.

   Utilisant ce résultat, donner une majoration de $P(|F_n - p| \geqslant \varepsilon)$ en fonction de n, ε, p et Π. Donner un majorant de cette probabilité ne dépendant pas de p.

   L'expérience $\mathcal{E}$ consiste à interroger une personne prise au hasard dans une vaste population sur le fait qu'elle utilise ou non un certain produit. Combien doit-on interroger de personnes pour que ce sondage aléatoire permette d'obtenir à 2,5 % près la proportion de personnes dans la population qui utilisent ce produit, avec un niveau de confiance supérieur à 0,95 ?