

Mines-Ponts (seconde épreuve)

PC 2002

PARTIE I

I.1.a. La solution générale de **E** est $u : x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu$, donc le problème aux limites admet pour unique solution $u : x \mapsto \frac{x - x^2}{2}$.

I.1.b. La solution générale de **E**₀ est $u : x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$ avec λ, μ réels quelconques.

— Si α est différent de 1 et de -1 , la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - \alpha^2} e^{\alpha x}$ est une solution particulière de **E**, et la solution générale est donc :

$$u : x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x + \frac{1}{1 - \alpha^2} e^{\alpha x}.$$

Il existe une unique solution vérifiant les conditions **C**, obtenue pour $\lambda = \frac{1}{\alpha^2 - 1}$ et $\mu = \frac{e^\alpha - \operatorname{ch} 1}{(\alpha^2 - 1) \operatorname{sh} 1}$.

— Si $\alpha = \pm 1$, la fonction $x \mapsto -\frac{\alpha}{2} x e^{\alpha x}$ est solution particulière, et la solution générale de **E** est :

$$u : x \mapsto \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x - \frac{\alpha}{2} x e^{\alpha x}.$$

La seule solution vérifiant **C** correspond aux valeurs $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\alpha e^\alpha}{2 \operatorname{sh} 1}$.

I.2.a. Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx = \underbrace{\left[u(x)u'(x) \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 u(x)u''(x) dx = \int_0^1 p(x)u(x)^2 dx$$

ce qui donne bien la relation demandée.

On en déduit que la fonction $u'(x)^2 + p(x)u(x)^2$ est nulle, puisqu'elle est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Ainsi, u' est nulle, puis u est constante, donc nulle sur $[0, 1]$ puisque $u(0) = 0$.

Ceci prouve que la seule solution de P_0 est l'application nulle (en remarquant qu'elle est bien solution de P_0).

I.2.b. Supposons que u_1 et u_2 soient deux solutions de P . L'application $u = u_1 - u_2$ est alors solution de P_0 , et donc $u = 0$, soit $u_1 = u_2$: le problème P possède au plus une solution.

I.3.a. La fonction g est solution de **E**₀ (puisque combinaison linéaire des deux solutions u_1 et u_2). Si elle s'annule en 1, elle vérifie les conditions aux limites **C**, et est donc nulle d'après la question 1.2.a.

Ainsi, si $g(1) = 0$, $u_1(0)u_2 = u_2(0)u_1$. Si $u_1(0)$ et $u_2(0)$ ne s'annulent pas simultanément, la famille (u_1, u_2) est liée. Sinon, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (il s'applique car p est continue), il existe une unique solution u_0 de $\mathbf{E}_0$ vérifiant $u_0(0) = 0$ et $u'_0(0) = 1$. Toujours grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz et en considérant les solutions u de $\mathbf{E}_0$ vérifiant respectivement $(u(0) = 0, u'(0) = u'_1(0))$ et $(u(0) = 0, u'(0) = u'_2(0))$, on obtient $u_1 = u'_1(0)u_0$ et $u_2 = u'_2(0)u_0$ et la famille (u_1, u_2) est liée. Dans tous les cas, la famille (u_1, u_2) est donc liée.

Réciproquement, si (u_1, u_2) est liée, on a immédiatement $g = 0$ puis $g(1) = 0$. On en déduit donc que $g(1)$ est non nul si et seulement si (u_1, u_2) est une base de l'espace des solutions de $\mathbf{E}_0$.

I.3.b. La fonction u est solution de $\mathbf{E}_0$, et les conditions $\mathbf{C}$ s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v(1) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, u est solution de $\mathcal{P}$ si et seulement si $UX = B$ avec $U = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v(1) \end{pmatrix}$.

I.3.c. Soit (u_1, u_2) une base de l'espace des solutions de $\mathbf{E}_0$ (on sait que cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 2 car p est continue) et v une solution particulière de $\mathbf{E}$. La matrice U définie ci-dessus est alors inversible (question I.3.a) et il existe un vecteur $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = U^{-1}B$ unique tel que $u = \lambda u_1 + \mu u_2 + v$ soit solution de P : ceci prouve que P possède une solution, qui est unique d'après la partie I.2.

PARTIE II

II.1.a. La propriété est évidente, puisque A est positive si et seulement si ses n vecteurs colonnes sont positifs, i.e. si et seulement si $Ae_i \geq 0$ pour tout i .

II.1.b. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Si X est nul, l'égalité demandée est évidente. Sinon, le vecteur $Y = X/\|X\|$ est de norme 1 et $\|AY\| \leq N(A)$. On en déduit que $\|AX\| \leq N(A)\|X\|$ en multipliant l'inégalité par $\|X\|$.

II.1.c. Soit X tel que $\|X\| \leq 1$. Nous avons :

$$\|AX\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$

car les $a_{i,j}$ sont positifs et les $|x_j|$ sont majorés par $\|X\|$ (et donc par 1).

En appliquant l'inégalité du b avec $X = E$, nous obtenons :

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \|AE\| \leq N(A)\|E\| = N(A),$$

ce qui donne avec l'inégalité précédente :

$$N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

II.1.d. Soit X tel que $AX = 0$. Comme $AX = 0 \geq 0$ et $A(-X) = 0 \geq 0$, on en déduit que X et $-X$ sont positifs, i.e. que X est nul : la matrice A est donc injective, i.e. inversible. On a ensuite, pour tout i , $A(A^{-1}e_i) = e_i \geq 0$, donc $A^{-1}e_i \geq 0$: ceci prouve que $A^{-1} \geq 0$ d'après la question II.1.a.

II.2.a. Supposons que X n'est pas positif, mais que $(A+H)X$ l'est. En utilisant les notations proposées par l'énoncé, nous avons $x_k < 0$ et $1 \leq k \leq n$. Les valeurs choisies pour x_0 et x_{n+1} permettent d'écrire :

$$(A+H)X = \begin{pmatrix} -x_0 + (2+h_1)x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2+h_2)x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-1} + (2+h_n)x_n - x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Comme ce vecteur est positif, nous avons en particulier $-x_{k-1} + (2+h_k)x_k - x_{k+1} \geq 0$, puis

$$h_k x_k = \underbrace{-x_{k-1} + (2+h_k)x_k - x_{k+1}}_{\geq 0} + \underbrace{x_{k-1} - x_k}_{\geq 0} + \underbrace{x_{k+1} - x_k}_{\geq 0} \geq 0$$

Comme $h_k \geq 0$ et $x_k < 0$, ceci impose $h_k = 0$, puis $x_{k-1} - x_k = x_{k+1} - x_k = 0$. Ainsi, les trois termes consécutifs x_{k-1} , x_k et x_{k+1} sont égaux au minimum de la famille des x_i : par récurrence, on montre que tous les x_i sont égaux, ce qui est absurde puisque $x_0 = 0$ et $x_k \neq 0$.

II.2.b. Le résultat précédent et la question II.1.d permettent d'affirmer que pour toute matrice diagonale H positive, $A+H$ est inversible et a une inverse positive. En choisissant $H = 0$, on montre ainsi que A est elle-même inversible.

II.3.a. Comme on vient de le dire, $(A+H)^{-1}$ et A^{-1} sont positives : comme E est positif, V et W sont également positifs.

D'autre part, $A(W-V) = AW - (A+H)V + HV = E - E + HV = HV = \sum_{i=1}^n h_i v_i \geq 0$ en notant v_i la i -ème coordonnée (positive) du vecteur V .

II.3.b. Comme $A(W-V)$ est positif, $W-V$ est également positif, ce qui donne $0 \leq v_i \leq w_i$ pour tout i , puis

$$\|V\| = \sup_{1 \leq i \leq n} v_i \leq \sup_{1 \leq i \leq n} w_i = \|W\|.$$

On en déduit :

$$\|(A+H)^{-1}X\| \leq N((A+H)^{-1}) \times \|X\| = \|(A+H)^{-1}E\| \times \|X\| = \|V\| \times \|X\| \leq \|W\| \times \|X\|.$$

II.4.a. Le polynôme caractéristique $P = -r^2 + 2r - 1$ de cette récurrence linéaire à coefficients constants admet 1 pour racine double : les éléments de S_0 sont donc les suites de la forme $x_k = \alpha k + \beta$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires.

II.4.b. Pour que la suite $(ak^2)_{k \geq 0}$ soit élément de S , il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall k \geq 1, a(-(k-1)^2 + 2k^2 - (k+1)^2) = 1,$$

ce qui est équivalent à $-2a = 1$. La suite $y_k = -\frac{k^2}{2}$ est donc élément de S .

II.4.c. Comme S est un espace affine de direction S_0 , on en déduit que les éléments de S sont les suites de la forme $k_k = \alpha k + \beta - \frac{k^2}{2}$ où α et β sont des réels quelconques.

En particulier, pour avoir $x_0 = x_{n+1} = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $\beta = 0$ et $\alpha = (n+1)/2$. Il existe donc une unique suite de S vérifiant $x_0 = x_{n+1} = 0$: c'est la suite de terme général $x_k = \frac{(n+1-k)k}{2}$.

II.4.d. En notant w_k les coordonnées du vecteur W , et en posant $w_0 = w_{n+1} = 0$, la relation $AW = E$ se traduit par $-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1} = 1$ pour k compris entre 1 et n . Quitte à prolonger la suite $(w_k)_{0 \leq k \leq n}$ en un élément de S , la question précédente prouve que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, w_k = \frac{(n+1-k)k}{2}.$$

On obtient l'inégalité demandée en remarquant que le trinôme $x \mapsto (n+1-x)x$ atteint, sur $[0, n+1]$, son maximum en $(n+1)/2$.

Partie III

III.1. Posons $R(t, h) = u(t+h) + u(t-h) - 2u(t) - h^2 u''(t)$. Comme u est de classe C^4 sur les intervalles $[t, t+h]$ et $[t-h, t]$, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{cases} \left| u(t+h) - u(t) - hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) \right| \leq \frac{h^4}{24} \sup [t, t+h] |u^{(4)}| \leq \frac{h^4}{24} M \\ \left| u(t-h) - u(t) + hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) \right| \leq \frac{h^4}{24} \sup [t-h, t] |u^{(4)}| \leq \frac{h^4}{24} M \end{cases}$$

Nous avons ainsi $u(t+h) + u(t-h) - 2u(t) = h^2 u''(t) + R(t, h)$ avec :

$$\begin{aligned} |R(t, h)| &\leq \left| u(t+h) - u(t) - hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) + u(t+h) - u(t) + hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) \right| \\ &\leq \left| u(t+h) - u(t) - hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) \right| + \left| u(t+h) - u(t) + hu'(t) - \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(t) \right| \\ &\leq \frac{h^4}{12} M \end{aligned}$$

III.2.a. La solution u au problème P est de classe C^2 sur I , avec $u'' = pu - f$. Comme p , u et f sont de classe C^2 , u'' est également de classe C^2 et u est de classe C^4 .

III.2.b. En notant z_k la k -ème coordonnée de Z , nous avons, pour k compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned} z_k &= -u(t_{k-1}) + 2u(t_k) - u(t_{k+1}) + p(t_k)h^2 u(t_k) - f(t_k)h^2 \\ &= -h^2 u''(t_k) - R(t_k, h) + h^2 p(t_k)u(t_k) - h^2 f(t_k) \\ &= -R(t_k, h) \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc :

$$\|Z\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |z_k| \leq \frac{h^4}{12} M.$$

III.2.c. Il suffit de regrouper les différents résultats démontrés :

$$\|X - \tilde{X}\| = \|(A + H)^{-1}(Z + Y) - (A + H)^{-1}Y\| = \|(A + H)^{-1}Z\| \leq \|W\| \times \|Z\| \leq \frac{1}{8}(n+1)^2 \frac{h^4}{12} M = K h^2$$

en posant $K = \frac{M}{96}$.

Le vecteur $\tilde{X}$ est donc la solution du problème obtenu en discrétisant le problème P : on s'intéresse uniquement aux valeurs $(u(t_1), \dots, u(t_n))$ prises par la fonction u solution de P aux points de la subdivision, puis l'équation $-u'' + pu = f$ est elle-même discrétisée en approximant la dérivée seconde u'' en chaque point t_k :

$$u''(t_k) \simeq \frac{1}{h^2} (u(t_{k-1}) - 2u(t_k) + u(t_{k+1})).$$

Le vecteur X vérifie donc :

$$(A + H)X \simeq Y,$$

alors que le vecteur $\tilde{X}$ est la solution exacte du système :

$$(A + H)\tilde{X} = Y.$$

Les calculs faits précédemment montrent que l'écart uniforme entre X et $\tilde{X}$ est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$: le vecteur $\tilde{X}$ fournit donc une relativement bonne approximation des valeurs prises par la solution u aux points t_i .

Le calcul de $\tilde{X}$ se fait en résolvant le système $(A+H)\tilde{X} = Y$. Il existe des méthodes de résolution efficaces. En particulier, en décomposant correctement la matrice $A+H$, il est possible de calculer $\tilde{X}$ en un temps linéaire, c'est-à-dire en effectuant un nombre d'opérations élémentaires qui est un $\mathcal{O}(n)$ (à titre de comparaison, la méthode du pivot de Gauss effectuée sur une matrice inversible de taille n demande de l'ordre de n^3 opérations).