

Corrigé du CCP 2009 TSI Maths I
A. ATTIQUI

Exercice 1.

1) (a) On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|u_n(r)| = r^n |\cos(n\theta)| \leq r^n$. comme $r \in]0, 1[$, la série géométrique $\sum r^n$ converge alors la série $\sum u_n(r)$ est absolument convergente.

(b) Soient $r \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|re^{i\theta}| = r < 1$. Par conséquent, la série (géométrique) de terme général $(re^{i\theta})^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)}{(1 - r \cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2(\theta)} = \frac{1 - r \cos(\theta) + ir \sin(\theta)}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$. L'application partie

réelle est \mathbb{R} -linéaire et continue de \mathbb{C} dans \mathbb{R} , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^n \right) = \frac{1 - r \cos(\theta)}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$.

2) (a) Soient $r \in]0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|re^{i\theta}| = r < 1$. Donc, $1 - 2r \cos(\theta) + r^2 = |1 - re^{i\theta}|^2 \neq 0$. Par suite, la fonction f est bien définie sur $]0, 1[\times \mathbb{R}$.

(b) D'après 1.(b), $1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = 1 + 2 \left(\frac{1 - r \cos(\theta)}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2} - 1 \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$.

Problème

Première partie

1. L'application $t \mapsto \sin(2t)$ ne s'annulant pas sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, alors la solution générale de l'équation différentielle en question, qui est linéaire et homogène du premier ordre, s'écrit sous la forme $f(t) = \lambda e^{g(t)}$ pour tout $t \in I$ où g est une primitive sur I de l'application $t \mapsto \frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$ et λ une constante réelle. L'application $t \mapsto \sin(2t)$ est strictement positive sur I , alors $g(t) = \ln(\sqrt{\sin(2t)})$, pour tout $t \in I$. Donc, $f(t) = \lambda \sqrt{\sin(2t)}$, pour tout $t \in I$.

2. La méthode de la variation de la constante consiste à rendre la constante λ une fonction de classe C^1 sur I . Alors, pour tout $t \in I$, $f'(t) = \lambda'(t) \sqrt{\sin(2t)} + \lambda(t) \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\sin(2t)}}$. En remplaçant dans l'équation avec second membre (Théoriquement, il ne reste que le terme $\lambda'(t)$) ce qui donne $\lambda'(t) = 1$, pour tout $t \in I$. Donc on aura, comme solution particulière, $t \mapsto t \sqrt{\sin(2t)}$. Par suite, la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est $f(t) = (t + \lambda) \sqrt{\sin(2t)}$, pour tout $t \in I$ et λ une constante réelle arbitraire.

Deuxième partie

1.(a) Un point $M(x, y) \in (C)$ ssi $((x+a)^2 + y^2)((x-a)^2 + y^2) = k^4$. Alors une équation cartésienne de la courbe (C) est donnée par : $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = k^4$. (on reconnaît les ovales de CASSINI).

(b) On a : $x^2 + y^2 = r^2$ et $x^2 - y^2 = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta)$. Donc l'équation en coordonnées polaires de la courbe (C) est donnée par : $r^4 - 2a^2 \cos(2\theta)r^2 + a^4 = k^4$ (*).

1.(a) En posant $R = r^2$, l'équation (*) devient : $R^2 - 2a^2 \cos(2\theta)R + a^4 - k^4 = 0$ (**).

(b) L'équation (**) admet deux racines réelles R_1 et R_2 avec $R_2 \geq R_1$ ssi $\Delta' = a^4 \cos^2(2\theta) + k^4 - a^4 \geq 0$. Par ailleurs, $R_1 + R_2 = 2a^2 \cos(2\theta)$ et $R_1 R_2 = a^4 - k^4$. Pour étudier le signe de R_1 et R_2 , on peut supposer que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ car l'application $\theta \mapsto \cos(2\theta)$ est π -périodique et paire sur \mathbb{R} . Les racines R_1 et R_2 sont alors positives ssi $a^2 \geq k^2$ et $\cos(2\theta) \geq \sqrt{1 - \frac{k^4}{a^4}}$ ssi $a^2 \geq k^2$ et $\theta \leq \frac{1}{2} \arccos \sqrt{1 - \frac{k^4}{a^4}}$.

(c) En supposant les conditions de 2.(b) satisfaites, les racines de (**) R_1 et R_2 sont alors réelles et positives. Par conséquent, les racines de l'équation (*) sont les quatre réelles : $r_1 = \sqrt{R_1}$, $r_2 = -\sqrt{R_1}$, $r_3 = \sqrt{R_2}$ et $r_4 = -\sqrt{R_2}$. Donc la courbe (C) est la réunion de 4 courbes d'équations polaires $\theta \mapsto r_i(\theta)$. On a d'après ce qui précède : $R_i(\theta) = a^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2(2\theta)}$ alors $r_i(\theta) = \pm \sqrt{a^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2(2\theta)}}$, pour tout $|\theta| \leq \frac{1}{2} \arccos \sqrt{1 - \frac{k^4}{a^4}}$ modulo π .

(d) Pour tout i de 1 à 4, l'application $\theta \mapsto r_i(\theta)$ est π -périodique et paire alors on peut limiter l'étude de la courbe à l'intervalle $[0, \frac{1}{2} \arccos \sqrt{1 - \frac{k^4}{a^4}}]$. On complète ensuite la courbe obtenue en lui appliquant d'abord la symétrie d'axe (Ox) puis la symétrie de centre O .

3.(a) Si $k = \pm a$, alors $R = 0$ ou $R = 2a^2 \cos(2\theta)$. Donc, $r(\theta) = \pm \sqrt{2a \cos(2\theta)}$ est une équation polaire de la courbe (C) (La lemniscate de BERNOULLI). Domaine d'étude est $[0, \frac{\pi}{4}]$ car $\theta \mapsto r(\theta)$ est π -périodique et paire. la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et symétrique par rapport au centre O . En fait, en notant $(C_1) : r_1(\theta) = \sqrt{2a \cos(2\theta)}$ et $(C_2) : r_2(\theta) = -\sqrt{2a \cos(2\theta)}$ on a alors $(C) = (C_1) \cup (C_2) \cup \{O\}$. Mais $O \in (C_1)$ et $(C_1) = (C_2)$ car $r_1(\theta + \pi) = -r_2(\theta)$. Donc, $(C) = (C_1)$.

(b) Dans le cas où $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'équation polaire de (C) devient : $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$ est définie sur, modulo π , $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et C^∞ sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Etude sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $r'(\theta) = \frac{-2\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$. En $\theta = 0$, $r(0) = 1$ et $r'(0) = 0$, tangente verticale. En $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r(\frac{\pi}{4}) = 0$, la courbe passe par le pôle, la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$. Le lecteur prendra soin de donner l'allure de la courbe (C) .

Troisième partie

1.(a) Soit (x, y, z) les coordonnées d'un point M alors leurs expressions en fonction de ses coordonnées cylindriques sont : $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$ où (r, θ) sont les coordonnées polaires du point m .

(b) $\vec{OM} = X \vec{u} + Y \vec{v} + Z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \Leftrightarrow x = X \cos(\theta) - Y \sin(\theta)$, $y = X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$ et $z = Z$. Donc, $X = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$, $Y = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$ et $Z = z$.

(c) En utilisant III.1.(b) pour $x = 1$ et $y = z = 0$, ce qui donne $\vec{i} = \cos(\theta) \vec{u} - \sin(\theta) \vec{v}$. Puis pour $x = z = 0$ et $y = 1$, $\vec{j} = \sin(\theta) \vec{u} + \cos(\theta) \vec{v}$. Par définition, on a : $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$.

(d) Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{k} sont unitaires et 2 à 2 orthogonaux. En outre, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{k}$, alors $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct.

2.(a) Soit $M(x, y, z) \in (\Sigma)$, d'après III.1.(a) ses coordonnées cylindriques sont (r, θ, z) . Alors, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = \frac{r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^2 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \cos(2\theta)$. Donc, une équation de la surface (Σ) , en coordonnées cylindriques, est $z = \cos(2\theta)$. Il est clair alors que la surface (Σ) est l'image de la nappe paramétrée $(r, \theta) \mapsto M(r, \theta) = (r, \theta, \cos(2\theta))$, en coordonnées cylindriques.

(b) Soit $M(r, \theta) \in (\Sigma)$, alors $|z| = |\cos(2\theta)| \leq 1$. Donc, la surface (Σ) est contenue dans la partie de \mathbb{R}^3 comprise entre les deux plans parallèles d'équations $z = 1$ et $z = -1$.

(c) Soit $M(r, \theta) \in (\Sigma)$, $\vec{OM} = r \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\theta) \vec{j} + \cos(2\theta) \vec{k}$. En appliquant les égalités de III.1.(b), on a alors $\vec{OM} = r \vec{u} + \cos(2\theta) \vec{k}$. Donc, $M(r, \theta) \in (D_\theta)$ où (D_θ) est la droite passant par le point $(0, 0, \cos(2\theta))$ et de direction \vec{u} . La droite (D_θ) est bien évidemment parallèle au plan d'équation $z = 0$. Inversement, pour tout point $M(x, y, z)$ de la droite (D_θ) on a : $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = \cos(2\theta)$ avec $r = (\vec{OM} | \vec{u}) = Om$. Donc, la surface (Σ) est la réunion des droites (D_θ) lorsque θ décrit $[0, 2\pi[$.

3.(a) Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$. Il est clair que le vecteur $\vec{N}(r, \theta) = r \vec{k} + 2 \sin(2\theta) \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} donc à (D_θ) donc à la nappe paramétrée $(r, \theta) \mapsto M(r, \theta)$, d'après III.2.(c).

(b) D'après ce qui précède, dans le repère cylindrique, les composantes du vecteur normal $\vec{N}(r, \theta)$ à la surface (Σ) sont $(0, 2 \sin(2\theta), r)$ et les coordonnées du point $M(r, \theta)$ sont $(r, 0, \cos(2\theta))$. Alors, dans le même repère, un point (X, Y, Z) est dans le plan tangent Π_M à (Σ) au point $M(r, \theta)$ ssi $((0, 2 \sin(2\theta), r) | (X - r, Y, Z - \cos(2\theta))) = 0$. Donc, une équation du plan Π_M est donnée par : $2 \sin(2\theta)Y + rZ = r \cos(2\theta)$.

(c) Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$, $\vec{OM} = r \vec{u} + \cos(2\theta) \vec{k}$. Alors, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}(r, \theta) = r \frac{d\vec{u}}{d\theta} - 2 \sin(2\theta) \vec{k} = r \vec{v} - 2 \sin(2\theta) \vec{k}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}(r, \theta) = \vec{u}$. Alors, dans le repère cylindrique, les composantes du vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}(r, \theta)$ sont $(0, r, -2 \sin(2\theta))$ et celles du vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}(r, \theta)$ sont $(1, 0, 0)$. On sait que ces deux vecteurs forment une direction du plan Π_M à (Σ) au point $M(r, \theta)$ (on suppose que c'est un point régulier de la surface). Donc, un point (X, Y, Z) est dans le plan tangent Π_M à (Σ) au point $M(r, \theta)$ ssi les vecteurs $(X - r, Y, Z - \cos(2\theta))$, $(0, r, -2 \sin(2\theta))$ et $(1, 0, 0)$ forment une famille liée (ou coplanaires). Ainsi, le déterminant de ces trois vecteurs est nul. Par suite, un simple calcul donne l'équation suivante du plan Π_M : $2 \sin(2\theta)Y + rZ = r \cos(2\theta)$. (Noter que $\vec{N}(r, \theta) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r}(r, \theta) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}(r, \theta)$).

(d) La droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindrique $(0, 0, \cos(2\theta))$ n'est autre que la droite (D_θ) (cf III.(c)), et on a vu que cette droite est contenue dans la surface (Σ) . Une paramétrisation, dans le repère cylindrique, de la droite (D_θ) est donnée par : $X = r$, $Y = 0$ et $Z = \cos(2\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}$. Alors, tout point $(X, Y, Z) \in (D_\theta)$ vérifie l'équation du plan Π_M : $2 \sin(2\theta)Y + rZ = r \cos(2\theta)$. Donc, la droite (D_θ) est contenue dans l'intersection de (Σ) et de Π_M .

4. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la surface (Σ) est définie par $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = f(x, y)$ pour $x^2 + y^2 \neq 0$. Alors, l'équation du plan tangent à (Σ) en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de (Σ) est donnée par,

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ce qui donne avec $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$4x_0y_0^2x - 4x_0^2y_0y - (x_0^2 + y_0^2)^2z + x_0^4 - y_0^4 = 0$$

Quatrième partie

1.(a) Pour tout $t \in I$, le point $M(t)$ de coordonnées cylindriques $(r(t), \theta(t), z(t))$ est dans (Σ) ssi $z(t) = \cos(2\theta(t))$, en faisant le même calcul que dans III.2.(a).

(b) Soit $t \in I$ tel que $M(t)$ est un point régulier de (Γ) . Etant donné que la courbe (Γ) est tracée sur la surface (Σ) , alors le point $M(t)$ est de coordonnées cylindriques $(r(t), \theta(t), \cos(2\theta(t)))$ et alors, dans le repère cylindrique, $\vec{OM}(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t)) + \cos(2\theta(t)) \vec{k}$. Donc, la tangente en $M(t)$ à la courbe (Γ) est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par le vecteur $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}(t) = r'(t) \vec{u}(\theta(t)) + r(t)\theta'(t) \frac{d\vec{u}}{d\theta}(\theta(t)) - 2\theta'(t) \sin(2\theta(t)) \vec{k}$. Par suite, en tenant compte que $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$, cette tangente est la droite d'équation paramétrique : $X = s.r'(t) + r(t)$, $Y = s.r(t)\theta'(t)$ et $Z = -2s.\theta'(t) \sin(2\theta(t)) + \cos(2\theta(t))$, avec $s \in \mathbb{R}$. Alors, $2 \sin(2\theta(t))Y + r(t)Z = r(t) \cos(2\theta(t))$. Donc, tout point (X, Y, Z) de cette tangente est dans le plan tangent Π_M à (Σ) en $M(t)$, d'après III.3.(b). D'où le résultat.

(c) La droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindriques $(0, 0, \cos(2\theta))$ et le point $M(r, \theta)$, de la surface (Σ) , admet comme paramétrisation, dans le repère cylindrique, (D_θ) : $X = s$, $Y = 0$ et $Z = \cos(2\theta)$ avec $s \in \mathbb{R}$. On a vu qu'elle est contenue dans la surface (Σ) (d'après III.3.(d)). D'après la question précédente, pour montrer que cette droite est contenue dans le plan tangent Π_M à (Σ) , il suffit de montrer que la tangente en $M(t)$ à la courbe (Γ) est colinéaire à \vec{u} pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Mais, tout point $M(r(t), \theta(t))$ de (Σ) appartient à (D_θ) ssi pour tout $t \in I$, $\theta(t) = \theta$. Donc l'arc paramétrée Γ tracée dans la surface (Σ) devient sur (D_θ) , $t \mapsto (r(t), \theta, \cos(2\theta))$. La fonction de classe C^1 sur I , $t \mapsto r(t)$ est non constante, il existe alors un réel t_0 tel que $r'(t_0) \neq 0$ et un vecteur tangent à l'arc paramétrée Γ en $M(t_0)$ est de coordonnées cylindriques $(r'(t_0), 0, 0) = r'(t_0) \vec{u}$. D'où le résultat.

2. Dans le repère cylindrique, $\vec{OM}(\theta) = r(\theta) \vec{u}(\theta) + \cos(2\theta) \vec{k}$. En dérivant par rapport à θ , et on se souviendra de $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$, on obtient : $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta) \vec{u}(\theta) + r(\theta) \vec{v}(\theta) - 2 \sin(2\theta) \vec{k}$. En dérivant une deuxième fois (r est de classe C^2 au moins) $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta)) \vec{u}(\theta) + 2r'(\theta) \vec{v}(\theta) - 4 \cos(2\theta) \vec{k}$

3.(a) Le vecteur $\vec{N}(r(\theta), \theta)$ est normal au plan tangent Π_M , alors il est orthogonal au vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$. Donc, le plan affine $P_M : \left(M(\theta), \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta), \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta) \right)$ coïncide avec le plan Π_M ssi $\vec{N}(r(\theta), \theta)$ est orthogonal au vecteur $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)$.

Donc, la courbe (Γ) est une ligne asymptotique de (Σ) ssi les vecteurs $\vec{N}(r(\theta), \theta)$ et $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)$ sont orthogonaux.

(b) Dans le repère cylindrique, le vecteur $\frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta)) \vec{u}(\theta) + 2r'(\theta) \vec{v}(\theta) - 4 \cos(2\theta) \vec{k}$ et le vecteur $\vec{N}(r, \theta) = r \vec{k} + 2 \sin(2\theta) \vec{v}$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul. Ainsi, $(\vec{N}(r(\theta), \theta) | \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)) = 4 \sin(2\theta)r'(\theta) - 4 \cos(2\theta)r(\theta) = 0$. Donc, une C.N.S. pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) est : $\sin(2\theta)r'(\theta) - \cos(2\theta)r(\theta) = 0$.

(c) Dans le repère cylindrique, on a le vecteur $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta) \vec{u}(\theta) + r(\theta) \vec{v}(\theta) - 2 \sin(2\theta) \vec{k}$ et le vecteur $\vec{N}(\theta) = \vec{N}(r(\theta), \theta) = r(\theta) \vec{k} + 2 \sin(2\theta) \vec{v}(\theta)$. Alors $\frac{d\vec{N}}{d\theta}(r(\theta), \theta) = -2 \sin(2\theta) \vec{u}(\theta) + 4 \cos(2\theta) \vec{v}(\theta) + r'(\theta) \vec{k}$. Une C.N.S. pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) est que les deux vecteurs $\frac{d\vec{N}}{d\theta}(\theta)$ et $\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)$ soient orthogonaux. En effet, on a $(\vec{N}(\theta) | \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)) = 0$, en dérivant par rapport à θ , on en déduit l'égalité : $(\vec{N}(\theta) | \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)) + (\frac{d\vec{N}}{d\theta}(\theta) | \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)) = 0$ Ainsi, $(\frac{d\vec{N}}{d\theta}(\theta) | \frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta)) = 0$ ssi $(\vec{N}(\theta) | \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2}(\theta)) = 0$. Ce qui équivaut donc à leur produit scalaire est nul. Un simple calcul donne encore l'équation différentielle : $\sin(2\theta)r'(\theta) - \cos(2\theta)r(\theta) = 0$.

4. D'après ce qui précède et dans le repère cylindrique, la courbe $(\Gamma) : \theta \mapsto M(r(\theta), \theta, \cos(2\theta))$ est une ligne asymptotique de (Σ) ssi la fonction r est solution de l'équation différentielle : $\sin(2\theta)r'(\theta) - \cos(2\theta)r(\theta) = 0$. D'après la partie I.1., la fonction $r = f_\lambda$ où $f_\lambda : \theta \mapsto \lambda \sqrt{\sin(2\theta)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, les lignes asymptotiques sont les courbes se projetant sur le plan horizontal $z = 0$ en les courbes d'équations polaires $r = \lambda \sqrt{\sin(2\theta)}$.