

\mathcal{E} désigne un espace affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé positif $R = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; l'espace vectoriel associé est noté E .

A, B, C sont les trois points mobiles par rapport à \mathcal{E} dont les positions à l'instant t sur les points $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ de coordonnées dans R :

$$A(t) \begin{cases} x = 0 \\ y = 5a \cdot \cos t \\ z = 5a \cdot \sin t \end{cases} \quad B(t) \begin{cases} x = a(3 \cos t - 4) \\ y = a(\cos t - 3) \\ z = 0 \end{cases} \quad C(t) \begin{cases} x = a(3 \cos t + 4) \\ y = a(\cos t + 3) \\ z = 0 \end{cases}$$

(a est une constante réelle strictement positive ; le temps t décrit $]-\infty, +\infty[$).

PARTIE 1

1.1. Caractériser les mouvements des points A, B, C.

1.2. Montrer qu'à tout instant t le triangle $(A(t), B(t), C(t))$ de \mathcal{E} est rectangle isocèle et que les longueurs de ses côtés sont indépendantes du temps. En déduire que A, B, C peuvent être considérés comme trois points d'un espace affine euclidien \mathcal{E}' en mouvement par rapport à \mathcal{E} . Le point de \mathcal{E}' milieu du segment (B, C) est noté P.

PARTIE 2

Dans le mouvement de \mathcal{E}' par rapport à \mathcal{E} on note :

$\Delta(t)$ l'axe central du torseur des vitesses à l'instant t ;

$\vec{\Omega}(t)$ le vecteur rotation à l'instant t ;

$h(t) \vec{\Omega}(t)$ le vecteur vitesse de glissement à l'instant t .

2.1. Montrer que les vecteurs $\vec{\Omega}(t)$ et $\overrightarrow{B(t)C(t)}$ sont colinéaires.

2.2. Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E . Calculer $h(t)$.

2.3. Trouver des équations de la droite $\Delta(t)$ dans le repère R et montrer que $\Delta(t)$ se projette orthogonalement sur le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ selon la droite $B(t)C(t)$.

A quels instants les droites $\Delta(t)$ et $B(t)C(t)$ sont-elles confondues ?

Montrer que, quand t varie, la droite $\Delta(t)$ engendre un cylindre de révolution Γ de \mathcal{E} dont on donnera le rayon et l'axe ; cet axe sera noté D.

PARTIE 3

On rapporte \mathcal{E}' au repère $R' = (A ; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ défini par :

$$\vec{I} = \frac{1}{5a} \overrightarrow{AP} ; \vec{J} = \frac{1}{10a} \overrightarrow{BC} ; \text{ pour tout } t : \vec{K}(t) = \vec{I}(t) \wedge \vec{J}(t).$$

3.1. Déterminer les coordonnées de $\vec{I}(t)$, $\vec{J}(t)$, $\vec{K}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E .

3.2. Calculer les coordonnées de $\vec{\Omega}(t)$, dans la base $(\vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$ de E .

-2-

3.3. Soit Δ_t la droite de \mathcal{E}' dont la position dans \mathcal{E} à l'instant t est $\Delta(t)$.

Trouver les équations de Δ_t dans le repère R' et montrer que, quand t varie, Δ_t engendre un cylindre de révolution Γ' de \mathcal{E}' dont on donnera le rayon et l'axe D' .

Montrer, soit géométriquement, soit par le calcul, qu'à tout instant t , la position $\Gamma'(t)$ de Γ' dans \mathcal{E} contient la droite D introduite en 2.3, et que les cylindres Γ et $\Gamma'(t)$ de \mathcal{E} admettent le même plan tangent en tous les points de $\Delta(t)$.

P A R T I E 4

4.1. Que peut-on dire des mouvements (par rapport à \mathcal{E}) de deux points distincts M et N de \mathcal{E}' tels que la droite MN soit parallèle à la droite BC ?
En déduire sans calcul qu'il existe une droite de \mathcal{E}' dont chaque point décrit un segment de droite dans \mathcal{E} , et une droite de \mathcal{E}' dont chaque point décrit un cercle dans \mathcal{E} .

4.2. Calculer les coordonnées dans R de la position $M(t)$ à l'instant t du point M de \mathcal{E}' dont les coordonnées (fixes) dans le repère R' sont (X, Y, Z) .
Quand t varie, le point $M(t)$ de \mathcal{E} engendre la trajectoire (L_M) de M dans \mathcal{E} .

Justifier :

$$\forall t \in]-\infty, +\infty[\quad \overrightarrow{OM}(t) = \vec{w}_M + \vec{u}_M \cos t + \vec{v}_M \sin t$$

où \vec{u}_M , \vec{v}_M et \vec{w}_M sont des vecteurs de \mathcal{E} qui dépendent de (X, Y, Z) mais pas de t .

4.3. Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}'$ la trajectoire L_M admet un centre de symétrie Q_M . Quel est la nature du sous-ensemble de \mathcal{E} constitué par les points Q_M ?

4.4. Rechercher les points $M \in \mathcal{E}'$ vérifiant l'une des conditions :

i) $\|\vec{u}_M\|$ est minimale ; ii) $\|\vec{v}_M\|$ est minimale.

4.5. Trouver le sous-ensemble de \mathcal{E}' constitué par les points M tels que L_M soit :

a) un segment de droite ; b) un cercle.

FIN pour TA

P A R T I E 5 (M et P' SEULEMENT)

Dans cette dernière partie on considère O comme un point mobile par rapport à \mathcal{E}' .

5.1. Calculer les coordonnées de O , à l'instant t , dans le repère R' .

5.2. Montrer que la trajectoire H de O par rapport à \mathcal{E}' est située sur une sphère et construire les projections de H sur les trois plans de coordonnées de R' .

F I N
