

Exercice I

1.

(a) C'est du cours : Soit $y \in \text{Im}(\pi) \cap \text{Ker}(\pi)$ donc $\exists x \in E$ tel que $y = \pi(x)$.

$\pi(y) = \pi^2(x) = 0$ or $\pi^2 = \pi$ donc $y = \pi(x) = 0$. $\text{Im}(\pi)$ et $\text{Ker}(\pi)$ sont donc en somme directe.

Par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi)) = \dim E$ on en déduit le résultat.

Conclusion : $\boxed{\text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi) = E}$

(b) i. $\forall x \in E, \exists (y, z) \in \text{Im}(\pi) \times \text{Ker}(\pi)$ tel que $x = y + z$.

On a $\pi(x) = y$ et $y \perp z$ car $\text{Im}(\pi) \perp \text{Ker}(\pi)$.

On en déduit que $\|\pi(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ (d'après Pythagore).

De plus, on a égalité si et seulement si $z = 0$, donc si et seulement si $x \in \text{Im}(\pi)$.

Conclusion : $\boxed{\|\pi(x)\| \leq \|x\| \text{ et égalité si et seulement si } x \in \text{Im}(\pi)}$

(b) ii. $\forall x \in E, \exists (y, z) \in \text{Im}(\pi) \times \text{Ker}(\pi)$ tel que $x = y + z$.

On a alors $\langle \pi(x), x \rangle = \langle y, y + z \rangle = \langle y, y \rangle = \|y\|^2 \geq 0$

Conclusion : $\boxed{\langle \pi(x), x \rangle \geq 0 \text{ et égalité si et seulement si } x \in \text{Ker}(\pi)}$

(c)

$\implies]$

$\forall x \in E, \exists (y, z) \in \text{Im}(\pi) \times \text{Ker}(\pi)$ et $\forall x' \in E, \exists (y', z') \in \text{Im}(\pi) \times \text{Ker}(\pi)$ tel que

$x = y + z$ et $x' = y' + z'$.

On a alors :

$\langle \pi(x), x' \rangle = \langle y, y' + z' \rangle = \langle y, y' \rangle$ et $\langle \pi(x'), x \rangle = \langle y', y + z \rangle = \langle y', y \rangle = \langle y, y' \rangle$, d'où $\pi^* = \pi$.

$\longleftarrow]$

$\forall y \in \text{Im}(\pi)$ et $\forall z \in \text{Ker}(\pi), \exists x \in E$ tel que $y = \pi(x)$.

On a donc $\langle y, z \rangle = \langle \pi(x), z \rangle = \langle x, \pi^*(z) \rangle = \langle x, \pi(z) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$ donc $\text{Im}(\pi) \perp \text{Ker}(\pi)$.

Conclusion : $\boxed{\pi \text{ est un projecteur orthogonal si et seulement si } \pi^* = \pi}$

2.

(a) Avec Cayley-Hamilton, $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = (0)$, donc

$M^2 = M \iff \text{tr}(M)M - \det(M)I_2 = M (*)$

Si (M, I_2) était liée alors comme I_2 est non nul, il existerait un λ dans $\mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_2$ et $M^2 = M$ donnerait $\lambda^2 = \lambda$ soit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: impossible car M est la matrice d'un projecteur strict. Donc (M, I_2) est libre et donc d'après (*), $M^2 = M \iff \text{tr}(M) = 1$ et $\det(M) = 0$.

Comme $M = {}^t M$, on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\text{tr}(M) = a + d$ et $\det M = a(1 - a) - b^2$

Conclusion : M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal si et seulement si $\begin{cases} d = 1 - a \\ b = c \\ a(1 - a) = b^2 \end{cases}$

(b) Le polynôme $P(x) = x(1 - x)$ n'est positif que si $x \in [0, 1]$ donc $a(1 - a) = b^2 \geq 0$ implique que $a \in [0, 1]$

Conclusion : $a \in [0, 1]$

(c) $N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de N sont donc a et 0. Si $a = 0$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: absurde car M est "stricte" donc $a \neq 0$ et par le corollaire de la deuxième caractérisation, N admettant 2 valeurs propres 2 à 2 distinctes est diagonalisable et comme $a \in [0, 1]$ on conclut :

Conclusion : N est diagonalisable et $\text{sp}(N) = \{0, a\} \subset [0, 1]$

(d) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que $M_{\mathcal{B}}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M de π_2 dans cette base est d'après la question précédente a) de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix}$ et donc $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1 - a \end{pmatrix}$ est la matrice de $\pi_1 \circ \pi_2$. On peut conclure grâce à la question précédente.

Conclusion : $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$

3.

(a) $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ car π_1 et π_2 sont symétriques. On en déduit d'après le théorème spectral que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Soit λ une valeur propre de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, donc il existe un vecteur x de E , non nul tel que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x) = \lambda x$, donc avec le 1°) a) $\|\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x)\| = \|\pi_1(\pi_2 \circ \pi_1(x))\| \leq \|\pi_2 \circ \pi_1(x)\| \leq \|\pi_1(x)\| \leq \|x\|$

donc $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ et comme x est non nul, on obtient $|\lambda| \leq 1$.

D'autre part avec ce même vecteur x , on a avec le 1°) b) $\langle \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x), x \rangle = \langle \pi_2(\pi_1(x)), \pi_1(x) \rangle \geq 0$ donc $\langle \lambda x, x \rangle \geq 0$ soit $\lambda \|x\|^2 \geq 0$ et comme x est non nul, on a $\lambda \geq 0$.

On peut conclure :

Conclusion : $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $[0, 1]$

(b) Soit $y \in \text{Im}(\pi_1)$, on a $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(y) = \pi_1(\pi_2 \circ \pi_1(y))$, il existe donc $x \in E$ tel que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(y) = \pi_1(x)$

Conclusion : $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$

(c) On démontre de la même manière que $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2$.

Sur $\text{Im}(\pi_1)$, π_1 agit comme l'identité donc l'induit $\widehat{\pi_1 \circ \pi_2} = \pi_1 \circ \widehat{\pi_2} \circ \pi_1$ et l'induit de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable car $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable et enfin comme le spectre de $\pi_1 \circ \widehat{\pi_2} \circ \pi_1$ est inclus dans celui de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, les valeurs propres sont dans $[0, 1]$.

Conclusion : L'induit de $\pi_1 \circ \pi_2$ sur $\text{Im}(\pi_1)$ est diagonalisable à spectre inclus dans $[0, 1]$

(d) On a pour tout sev F et H de E , $(F + H)^\perp = F^\perp \cap H^\perp$.

En effet $F \subset F + H$ donc $(F + H)^\perp \subset F^\perp$ idem pour $H \subset F + H$, donc $(F + H)^\perp \subset F^\perp \cap H^\perp$.

Réciproquement si $x \in F^\perp \cap H^\perp$ alors $\forall y + z \in F + H$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0 + 0 = 0$ donc $x \in (F + H)^\perp$. On l'applique à $F = \text{Im}(\pi_1)$ et $H = \text{Ker}(\pi_2)$, comme $\text{Im}(\pi_1)^\perp = \text{Ker}(\pi_1)$ et $\text{Ker}(\pi_2)^\perp = \text{Im}(\pi_2)$, enfin si $x \in G^\perp$, alors $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x)) = \pi_1(x) = 0$ on peut conclure :

Conclusion : $G^\perp = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2)$ et $\pi_1 \circ \pi_2$ y est nul

(e) On a $G + G^\perp = \text{Im}(\pi_1) + \text{Ker}(\pi_2) + G^\perp$. Sur $\text{Im}(\pi_1)$, $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable (à valeurs propres dans $[0, 1]$) et sur $\text{Ker}(\pi_2) + G^\perp$, $\pi_1 \circ \pi_2$ est nulle. On peut donc trouver une base de vecteurs propres de $\pi_1 \circ \pi_2$ de $G + G^\perp = E$.

Conclusion : $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0, 1]$

(f) Si $(e_1, \dots, e_{r_2})$ est une base orthonormée de $\text{Im}(\pi_2)$ et $(e_{r_2+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\text{Ker}(\pi_2)$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et donc $\text{Im}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{vect}(\pi_1 \circ \pi_2(e_1), \dots, \pi_1 \circ \pi_2(e_n)) = \text{vect}(\pi_1 \circ \pi_2(e_1), \dots, \pi_1 \circ \pi_2(e_{r_2}))$ d'où $\text{rg}(\pi_1 \circ \pi_2) \leq \text{rg}(\pi_2) = r_2$.

Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nul de $\pi_1 \circ \pi_2$ d'après le rang, on a $p \leq r_2$ et

$\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = \lambda_1 + \dots + \lambda_p \leq p$ car toutes les valeurs propres sont dans $[0, 1]$

On peut conclure :

Conclusion : $\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) \leq r_2$

Pour l'égalité on utilise la formule $\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \langle u(e_k), e_k \rangle$ avec $u = \pi_1 \circ \pi_2$:

$$\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = \sum_{k=1}^n \langle \pi_1 \circ \pi_2(e_k), e_k \rangle = \sum_{k=1}^{r_2} \langle \pi_1 \circ \pi_2(e_k), e_k \rangle = \sum_{k=1}^{r_2} \langle \pi_1(e_k), e_k \rangle \leq 1 \cdot r_2$$

avec Cauchy-Schwarz et le 1°)a) pour l'inégalité ci-dessus.

Donc on aura égalité si $\forall k \in \llbracket 1, r_2 \rrbracket : \langle \pi_1(e_i), e_i \rangle = 1$, ce qui impose avec le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz que $\pi_1(e_i)$ et e_i soit liés donc que $e_i \in \text{Im}(\pi_1)$ soit donc $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$.

Réciproquement, si $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$ alors $\forall k \in \llbracket 1, r_2 \rrbracket : \langle \pi_1(e_i), e_i \rangle = 1$ et donc $\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = r_2$

Conclusion : $\boxed{\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = r_2 \text{ SSI } \text{Im}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)}$

Exercice II

1. (a)

On a $\boxed{M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & AE+B \\ C & CE+D \end{pmatrix}}$.

(b)

On choisit E tel que $AE+B = O_n$ donc $E = -A^{-1}B$ d'où $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$,

la formule des déterminants par blocs donne

$$\det(M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n}) = \det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(-CA^{-1}B + D)$$

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(D - CA^{-1}B)}$

2. (a)

$$\det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A(D - CA^{-1}B)) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CB)) \text{ car } AC = CA$$

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)}$

(b) i. $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n - A & B \\ C & \lambda I_n - D \end{pmatrix}$. si λ n'est pas une valeur propre de A alors $\lambda I_n - A$

est inversible et commute avec C donc d'après la question précédente,

$$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n - D) - CB) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V) \text{ avec } U = -(A+D) \text{ et } V = AD - CB.$$

Considérons P définie par $P(x) = \chi_{M_{A,B,C,D}}(x) - \det(x^2 I_n + xU + V)$. P est une fonction polynomiale qui admet une infinité de racines ($\mathbb{C} - \text{sp}(A)$). Donc cette fonction est identiquement nulle :

Conclusion :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V) \text{ avec } U = -(A+D) \text{ et } V = AD - CB.}$$

(b) ii. Pour $\lambda = 0$, on obtient tout de suite le résultat :

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB)}$

3. (a) ${}^t(tBB) = {}^tBB$ et $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad {}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 \geq 0$

$\forall \lambda \in \text{sp}({}^tBB) \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que ${}^tBBX = \lambda X$ donc ${}^tX{}^tBBX = \lambda({}^tX)X = \lambda\|BX\|^2 \geq 0$ et comme $\|BX\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geq 0$

Conclusion : tBB est symétrique et positive à spectre dans $\mathbb{R}^+$

(b) Avec le 2°), on a $\chi_S(\lambda) = \det((\lambda - 1)^2 I_n - {}^tBB) = \chi_{{}^tBB}((\lambda - 1)^2)$

(c)

C'est du cours : conséquence du théorème spectral.

(d)

Soit μ une valeur propre de tBB , alors $\mu \geq 0$ (c'est le a)) et en résolvant $\mu = (\lambda - 1)^2$ on obtient que $1 \pm \sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de S .

Si S est définie positive alors il faut que pour toute valeur propre μ de tBB , $1 - \sqrt{\mu} > 0$ soit $0 \leq \mu < 1$.

Réciproquement si toutes les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ de tBB vérifie $\mu_i < 1$, alors les valeurs propres de S sont les $1 \pm \sqrt{\mu_i}$ et pour tout i , $1 \pm \sqrt{\mu_i} > 0$.

Conclusion : S est définie positive SSI les valeurs propres de tBB sont < 1

4. (a) Comme $2A_{n-1}$ et iA_{n-1} commutent, on peut appliquer la formule du 2°) : $\det A_n = \det(-3A_{n-1}^2)$.

Par récurrence, on montre que A_n est de taille $2^n \times 2^n$, donc $-3A_{n-1}^2$ est de taille $2^{n-1} \times 2^{n-1}$

Conclusion : $\det A_n = (3)^{2^{n-1}}(\det A_{n-1})^2$

(b)

On en déduit que si $n \geq 2$ alors :

$$\begin{aligned} \det A_n &= (3)^{2^{n-1}}(\det A_{n-1})^2 = (3)^{2^{n-1}}[(3)^{2^{n-2}}(\det A_{n-2})^2]^2 = (3)^{2^{n-1}}[(3)^{2^{n-1}}(\det A_{n-2})^2]^2 \\ &= (3)^{2 \cdot 2^{n-1}}[(\det A_{n-2})^2]^2 = \dots = (3)^{(n-1)2^{n-1}}(\det A_1)^{2^{n-1}} = (3)^{n2^{n-1}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\det A_n = (3)^{n2^{n-1}}$ et $\det A_1 = -3$

(c) On réapplique le 2°) d'où

$$\chi_{A_n} = \det(\lambda^2 I_n - 3A_{n-1}^2) = (3)^{2^{n-1}} \det\left(\frac{\lambda^2}{3} I_n - A_{n-1}^2\right) = (3)^{2^{n-1}} \det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_n - A_{n-1}\right) \det\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} I_n + A_{n-1}\right)$$

Conclusion : $\chi_{A_n}(\lambda) = (3)^{2^{n-1}} \chi_{A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right) \chi_{-A_{n-1}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)$

(d) comme les valeurs propres de A_1 sont $\pm\sqrt{3}$, on en déduit que

Conclusion : Les valeurs propres de A_n sont $\pm(\sqrt{3})^n$ (2 valeurs propres d'ordre 2^{n-1})

Exercice III

1. (a)

OB étant un diamètre, ON_tB est un triangle rectangle en N_t .

(b)

Le centre du cercle est le milieu de OB d'où l'équation est $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Conclusion : $\mathcal{C}/x^2 + y^2 - y = 0$ et $\mathcal{D}'/y = 1$

(c)

La droite (OM_t) a pour équation $\begin{vmatrix} x & t \\ y & 1 \end{vmatrix}$ soit $x - ty = 0$.

$$N_t(x, y) \in \mathcal{C} \cap (OM_t) \iff \begin{cases} x = ty \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = ty \\ (1 + t^2)y^2 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = ty \\ y = \frac{1}{1 + t^2} \text{ car } y \neq 0 \end{cases}$$

Conclusion : $N_t \left(\frac{t}{1 + t^2}, \frac{1}{1 + t^2} \right)$

(d) **Conclusion** : $\overrightarrow{N_t M_t} \left(\frac{t^3}{1 + t^2}, \frac{t^2}{1 + t^2} \right)$

2. (a) $P(-t) = s_{Oy}(P(t))$ donc étude sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ et symétrie de la courbe par rapport à s_{Oy} .

La fonction P est de classe C^∞ sur I et l'on a $\mathcal{D} \begin{cases} x' = \frac{3t^2 + t^4}{(1 + t^2)^2} \\ y' = \frac{2t}{(1 + t^2)^2} \end{cases}$

On en déduit un tableau de variation où x et y sont strictement croissantes sur I avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$ donc $\mathcal{D}'$ est asymptote à la courbe.

(b) En t_0 , P est stationnaire car $x'(0) = y'(0) = 0$. On effectue des DL : $x(t) = t^3 + o(t^3)$ et $y(t) = t^2 + o(t^3)$

d'où $P''(0) = (0, 2)$ et $P'''(0) = (6, 0)$. On en déduit

Conclusion : P_O est un point de rebroussement de première espèce.

(c) Notons Δ^+ la région comprise entre la courbe Γ et $\mathcal{D}'$ et les abscisses positives. Par symétrie l'aire recherchée vaut $2\mathcal{A}(\Delta^+)$.

L'aire de Δ^+ est obtenue en "voyant" Δ^+ comme réunion des segments $[P_t, Q_t]$ où O, P_t, Q_t sont alignés

et $Q_t \in \mathcal{D}'$. On effectue donc le changement de variable : $\mathcal{D} \begin{cases} x = \lambda \frac{t^3}{1 + t^2} \\ y = \lambda \frac{t^2}{1 + t^2} \\ 1 \leq \lambda \leq \frac{1 + t^2}{t^2} \\ 0 \leq t \leq +\infty \end{cases}$

Le jacobien vaut $\frac{D(x, y)}{D(\lambda, t)} = -\frac{\lambda t^4}{(1 + t^2)^2}$.

D'où $\mathcal{A}(\Delta^+) = \int_0^{+\infty} \int_1^{\frac{1+t^2}{t^2}} \frac{\lambda t^4}{(1 + t^2)^2} d\lambda dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{t^4}{(1 + t^2)^2} \right) dt = \frac{3}{8}\pi$

Conclusion : L'aire recherchée vaut $\frac{3}{4}\pi$

3. (a) M' a pour affixe $\frac{z}{|z|^2}$, donc $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1}$

(b)

Conclusion : $\boxed{U_t(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})}$

(c) L'image par σ de Γ est donc la parabole d'équation $y = x^2$ privé du point O .