EXERCICE I

Informatique :

EXERCICE II

6) Ici $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}(e_1, e_2)$ canonique de $\mathbb{R}^2$, alors pour $x = ae_1 + be_2 \in \mathbb{R}^2$, on $u(x) = -be_1 + ae_2$.
On a bien $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, pourtant l'endomorphisme u n'est pas nul.

7) $i \Longrightarrow ii$ Soit $(x, y) \in E^2$, alors

$$\begin{array}{rcl} \langle u(x), u(y)\rangle & = & \langle x, v(u(y))\rangle \text{ Par déf de } v \\ & = & \langle x, u \circ v(y)\rangle \text{ car } u \circ v = v \circ u \\ & = & \langle u \circ v(y), x\rangle \text{ car } \langle,\rangle \text{ est symétrique} \\ & = & \langle v(y), v(x)\rangle \text{ Par déf de } v \\ & = & \langle v(x), v(y)\rangle \text{ car } \langle,\rangle \text{ est symétrique} \end{array}$$

$ii \Longrightarrow iii$ Dans ii on prend $x = y$.
$iii \Longrightarrow ii$ Soit $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle u(x), u(y)\rangle & = & \frac{1}{4}(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)^2\|) \\ & = & \frac{1}{4}(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) \\ & = & \frac{1}{4}(\|v(x+y)\|^2 - \|v(x-y)\|^2) \\ & = & \frac{1}{4}(\|v(x)+v(y)\|^2 - \|v(x)-v(y)\|^2) \\ & = & \langle v(x), v(y)\rangle \end{array}$$

$ii \Longrightarrow i$ Soit $(x, y) \in E^2$, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle u \circ v(x) - v \circ u(x), y\rangle & = & \langle u \circ v(x), y\rangle - \langle v \circ u(x), y\rangle \\ & = & \langle v(x), v(y)\rangle - \langle u(x), u(y)\rangle \\ & = & 0 \end{array}$$

Alors $u \circ v(x) - v \circ u(x) \in E^{\perp} = \{0\}$, donc $u \circ v = v \circ u$.

PROBLEME

Partie I - Étude de quelques exemples

8) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{tr}(B)$ car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Et $\det A = \det(P^{-1}PB) = \det(B)$ car $\det(AB) = \det(BA)$.

$\chi_A = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det P \det(XI_n - B)\det(P^{-1}) = \det(XI_n - B) = \chi_B$ car $\det(AB) = \det(B)\det(A)$.

On sait qu'un automorphisme transforme un sous espace en un autre de même dimension, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

9) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 5$, et $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$ et enfin $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$.

Il est simple de vérifier que $E_2(A) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})$ donc diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Et $E_2(B) = \mathrm{vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$ donc non diagonalisable.

Supposons que A et B sont semblables, par transitivité, B et $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ seront semblables, donc B est diagonalisable, ce qui est absurde.

Conséquence A et B ne sont pas semblables.

$\pi_A = (X-1)(X-2)$, car A est diagonalisable.

$\pi_B = (X-1)(X-2)^2$, car B est non diagonalisable.

$\pi_A \neq \pi_B$.

10) **Première méthode.**

Cherchons une base $\mathcal{B}_1(v_1, v_2, v_3)$ de E telle que $\mathrm{matr}_{\mathcal{B}_1}(u) = B$. On a $\mathrm{matr}_{\mathcal{B}}(u) = A$

Alors $\left\{\begin{array}{lcl} u(v_1) &=& v_2 + v_3 \\ u(v_2) &=& v_1 + 2v_3 \\ u(v_3) &=& v_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} u(e_2) &=& e_1 + e_3 \\ u(e_1) &=& e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) &=& e_1 \end{array}\right.$

Il est clair que $(v_1, v_2, v_3) = (e_2, e_1, e_3)$ convient et c'est une base de $\mathbb{R}^3$, donc A et B sont semblables.

Deuxième méthode. Par un calcul simple $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$, qui est simplement scindé dans $\mathbb{R}$, donc ces deux matrices sont diagonalisables et semblables tous à $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$, par transitivité A et B sont semblables.

11) Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\text{rg}(u) = 1$ donc la dimension du noyau de u est $n-1 \geq 1$, soit $(v_1, v_2, \dots v_{n-1})$ une base de ce noyau, et soit v_n un vecteur quelconque n'appartenant pas au noyau $\text{Ker}(u)$, alors $\mathscr{B}_1(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme demandée.

12) Par la question 11) $u(v_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, donc $u^2(v_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i u(v_i) = a_n u(v_n)$, puisque $u^2 \neq 0$ et $\forall i \in [[1, (n-1)]]$; $u^2(v_i) = 0$, alors $u^2(v_n) \neq 0$, donc $a_n \neq 0$.

Or $\chi_U = X^{n-1}(X - a_n)$, donc $\text{Sp}(U) = \{0, a_n\}$ et comme $\dim(E_0(u)) = \dim \text{Ker} u = (n-1)$, alors u est diagonalisable, car l'autre valeur propre est simple.

13) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ qui est symétrique de polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pa scindé dans $\mathbb{R}$, donc non diagonalisable.

14) Supposons que C_1, C_2, C_3, C_4 sont les colonnes de A ; on a $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$, le rang de A est inférieur ou égal à 2.

Supposons que (C_1, C_2) est liée, comme $C_2 \neq 0$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tels que $C_1 = \lambda C_2$, alors $\alpha = \lambda\beta$ donc $\beta = \lambda\alpha$, donc $\alpha(\lambda^2 - 1)$, comme $\alpha \neq 0$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Si $\lambda = 1$, alors $\alpha = \beta$ ce qui est faux, et si $\lambda = -1$, alors $\alpha = -\beta$ ce qui est faux aussi, donc la famille (C_1, C_2) est libre. Alors $\text{rg}(A) = 2$, donc $\dim \text{Ker}(A) = 2 \neq 0$, alors 0 est une valeur propre de A.

Il est simple de vérifier que :

$\text{Ker}(A - 2(\alpha+\beta)I_n) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\text{Ker}(A - 2(\alpha-\beta)I_n) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $\text{Ker}(A) = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$.

La somme de ces espaces est évidement égal à $\mathbb{C}^4$, car la somme de leurs dimensions est 4, alors $\mathscr{B}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{C}^4$ formée de vecteurs propres de A.

Remarque La matrice A est symétrique, mais on ne peut pas dire qu'elle est au départ diagonalisable sauf si α et β sont des réels.

Si α et β sont des réels, la base donnée ici est orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$.

15) Si $a = b$, alors $A = B$ donc semblables.

Si $a \neq b$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}(e_1, e_2)$ est A. Cherchons une base $\mathscr{B}_1(v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dont la quelle la matrice de u est B, on alors $\left\{\begin{array}{rcl} u(e_1) & = & \lambda e_1 \\ u(e_2) & = & ae_1 + \lambda e_2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u(v_1) & = & \lambda v_1 \\ u(v_2) & = & bv_1 + \lambda v_2 \end{array}\right.$
On prend $v_1 = e_1$ et soit $v_2 = xe_1 + ye_2$, alors l'équation $u(v_2) = bv_1 + \lambda v_2$ s'écrit aussi $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $ay = b$, comme $a \neq 0$, alors $y = \dfrac{b}{a}$ et x est quelconque, alors $v_2 = \dfrac{b}{a}e_2$, on a bien (v_1, v_2) est une base car $b \neq 0$, donc A et B sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

16) L'égalité $B = P^{-1}AP$ s'écrit aussi, $PB = AP$, alors $(R + iS)B = A(R + iS)$, alors $RB + iSB = AR + iAS$, comme les matrices $RB; SB; AR$ et AS sont réels, alors $RB = AR$ et $SB = AS$.

17) Si on pose $R = (r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors :

$\det(R + xS) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (r_{i,j} + xs_{i,j})$, or les quantités $r_{i,j} + xs_{i,j}$ sont des fonctions polynômiales de degré 1, donc $\prod_{i=1}^{n}(r_{i,j} + xs_{i,j})$ sont des fonctions polynômiales de degré n, alors $\det(R + xS)$ est une fonction polynômiale de degré $\leq n$, or $\det(R + iS) = \det(P) \neq 0$, donc non nul, alors possède un nombre fini de racines réels, donc $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + x_0S) \neq 0$, alors la matrice $(R + x_0S)$ est inversible.

18) On a $RB = AR$ et $SB = AS$ alors $RB + x_0SB = AR + x_0AS$, donc $(R + x_0S)B = A(R + x_0S)$, or la matrice $(R + x_0S)$ est inversible et réel, donc les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

19) $\chi_B = X\det\begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = X(X^2 + 1) = X^3 + X = \chi_A$ qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ de racines $0; i; -i$, donc ces deux matrices sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et tous semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, donc elles sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et comme elles sont des matrices réelles, par application des questions précédentes, les matrices A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie III

20) • Si A est diagonalisable, comme $\pi_A = \pi_B$, alors π_B est scindé à racines simples, donc B aussi.

$\chi_A = \chi_B$, donc A et B sont semblables à la même diagonale, par conséquent elles sont semblables.

• Si A n'est pas diagonalisable, alors A possède une seule valeur propre notée α qui est aussi la seule valeur propre de B car $\chi_A = \chi_B$, alors $\pi_A = \pi_B = (X-\alpha)^2$.

Ces deux matrices sont trigonalisables car leurs polynômes caractéristiques sont scindés $= (X-\alpha)^2$, donc A est semblables à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, de même B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, alors A sera diagonalisable, absurde, de même $b \neq 0$, par la question $Q15$), A et B sont semblables.

21) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $A \neq 0$; $B \neq 0$; calcul par blocs donne $A^2 = B^2 = 0$, donc $\pi_A = \pi_B = X^2$ et on $\chi_A = \chi_B = X^4$.

• Mais $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{rg}(B) = 2$ d'après la question 8, ces deux matrices ne sont pas semblables.

Pour les remarques sadikoulmeki@yahoo.fr
Omar SADIK CPGE My Driss Fès.