

Proposition de corrigé CCINP TSI 2024

Exercice

1. On dit qu'une série converge ssi la suite de ses sommes partielles converge.

En maths : $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge ssi $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$ est une valeur finie.

2. On reconnaît la série de Riemann : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

3. On va étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = e^x - (x + 1)$.
Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $f'(x) = e^x - 1$.

On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	↘ 0	↗ $+\infty$

On a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$

4. $e^{H_n} = e^{(1+\dots+\frac{1}{n})} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdots e^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}} \geq \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})$.

$$\text{Or } \prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^n (\frac{k+1}{k}) = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \text{ (ou télescopage).}$$

On a bien : $\forall n \geq 1, e^{H_n} \geq n + 1$

5. Puisque $e^{H_n} \geq (n + 1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, on obtient par minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{H_n} = +\infty$.

Par composée de limite (fonction continue), on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

On retrouve la divergence de la série harmonique.

6. La variable Z_n compte le nombre de fois où la boule noire est apparue au cours des n premiers tirages.

7. X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$: au moment du k -ième tirage, on a rajouté $(k-1)$ boules blanches en plus de la noire du début.

$$E(X_k) = \frac{1}{k}$$

8. On sait que l'espérance est linéaire : $E(Z_n) = E(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$.

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n.$$

9. On veut une moyenne d'au moins 4 boules : cela signifie que l'espérance doit être supérieure au égale à 4.

Ainsi $H_n \geq 4 \iff e^{H_n} \geq e^4$ car la fonction exponentielle est croissante.

On prendra donc $n = 54$.

Problème 1

Partie I

10. On a bien des "1" sur la diagonale, des termes non nuls uniquement sur la sur-diagonale et la sous-diagonale et on a bien $a_1b_1 = a_2b_2 = -1$

11. $M_3 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que la première et la troisième colonne sont colinéaires, mais pas la deuxième.

Donc le rang de $M_3 - I_3$ est égal à 2 et la matrice $M_3 - I_3$ n'est pas inversible ce qui équivaut à dire que 1 est valeur propre de M_3 .

De plus la dimension de $\text{Ker}(M_3 - I_3)$, c'est à dire de l'espace propre associé à la valeur propre 1, est égale à 1.

12. $\chi_{M_3}(X) = \det(XI_3 - M_3) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$.

On va ajouter les colonnes 1 et 3 sur la première colonne pour factoriser par $(X-1)$, puis on fera l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

$$\chi_{M_3}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 2 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_{M_3}(X) = (X-1) \cdot ((X-1)^2 + 2).$$

On obtient un polynôme qui n'est pas scindé sur \mathbb{R} . (La matrice n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} .)

13. D'après le cours, $\det(M_3) = (-1)^3 \chi_{M_3}(0) = 3$.
14. On sait que le polynôme caractéristique est de degré 3. Il admet 1 comme racine simple et le polynôme de degré 2 a un discriminant négatif : il aura donc 2 racines complexes conjuguées.
3 valeurs propres distinctes en dimension 3 : M_3 est diagonalisable dans \mathbb{C} et tous les espaces propres sont de dimension 1.
15. $E_1(M_3) = \text{Ker}(M_3 - I_3)$.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } M_3 X = X \iff \begin{cases} x + y & = x \\ -x + y + z & = y \\ -y + z & = z \end{cases} \iff y = 0 \text{ et } x = z$$

$$\text{D'où } \boxed{E_1(M_3) = \text{Vect}(1, 0, 1)}$$

16. $M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$
- $$\iff \begin{cases} p + i\sqrt{2} & = (1 + i\sqrt{2})p \\ -p + i\sqrt{2} - p & = (1 + i\sqrt{2})i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} - p & = -(1 + i\sqrt{2})p \end{cases} \iff \begin{cases} i\sqrt{2} & = i\sqrt{2}p \\ -2p + i\sqrt{2} & = i\sqrt{2} - 2 \\ -i\sqrt{2} & = -i\sqrt{2}p \end{cases} \iff p = 1$$

Comme on obtient un vecteur non nul, on peut conclure que $\mu = 1 + i\sqrt{2}$ est valeur propre de M_3 et que $\boxed{E_\mu(M_3) = \text{Vect}(1, i\sqrt{2}, -1)}$

17. Soit X un vecteur propre de N , matrice à coefficients réels.
On appelle z une valeur propre de N . On a donc $NX = z.X$.
On conjugue cette relation en appliquant les règles de conjugaison : le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués.

$$\overline{NX} = \overline{N} \cdot \overline{X} = \overline{z} \overline{X}.$$

Comme $N \in M(\mathbb{R})$, $\overline{N} = N$, donc $N\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$. Comme X est non nul, \overline{X} est non nul aussi : \overline{X} est bien un vecteur propre de N associé à \overline{z} .

$$\boxed{E_{\overline{\mu}}(M_3) = \text{Vect}(1, -i\sqrt{2}, -1)}$$

Partie II

18. $\chi_{M_2}(X) = (X - 1)^2 - a_1 b_1 = (X - 1)^2 + 1$
19. Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur \mathbb{R} . La matrice M_2 n'est ni diagonalisable, ni trigonalisable dans \mathbb{R} .
20. Le polynôme est scindé à racines simples dans \mathbb{C} : la matrice est donc diagonalisable dans \mathbb{C} .
21. $\det(M_2) = 1 - a_1 b_1 = 2$

Partie III

22. On raisonne par récurrence : Soit P_n la propriété : " F_n et F_{n+1} sont des entiers naturels."

Initialisation : $F_0 = F_1 = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose que P_n est vraie et on montre que P_{n+1} est vraie.

On sait déjà que F_{n+1} est un entier naturel et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Or la somme d'entiers naturels est un entier naturel. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \in \mathbb{N}$.

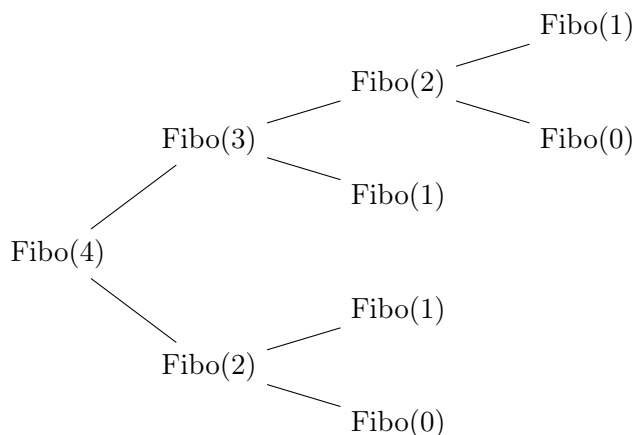
23. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée est : $X^2 - X - 1 = 0$ avec $\Delta = 1 + 4 = 5$.
Les racines sont donc $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

D'après le cours, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

On détermine a et b à l'aide des conditions initiales :
$$\begin{cases} F_0 = 1 = a + b \\ F_1 = 1 = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

Après calculs on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

24. (a)



- (b) Pour calculer le terme F_4 on dit qu'il est la somme de F_3 et F_2 que l'on ne connaît pas directement. On garde cette information en mémoire et on poursuit en cherchant F_3 qui est la somme de F_2 et F_1 . On peut remplacer F_1 directement mais il va falloir chercher F_2 une deuxième fois...

- (c)

```
def fibo_iter(n):
    u=1
    v=1
    for k in range(2, n+1):
        w=u+v
        u=v
        v=w
    return w
```

Partie IV

25. $d_1 = \det(M_1) = 1$ et $d_2 = 2$ d'après Q.21 partie III.
Enfin d'après Q.13 partie I, $d_3 = 3$.

$$26. d_{n+2} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}$$

d_{n+2} est le déterminant d'une matrice de $M_{n+2}(\mathbb{C})$.

On développe ce déterminant par rapport à la dernière ligne.

$$d_{n+2} = (-1)^{(n+2+n+1)} a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + (-1)^{2(n+2)} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

On reconnaît le dernier déterminant (c'est d_{n+1}) et on développe le premier, par rapport à la dernière colonne.

De plus $(-1)^{(n+2+n+1)} = -1$, d'où

$$d_{n+2} = (-1) a_{n+1} (-1)^{2(n+1)} b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + d_{n+1}$$

Comme $a_{n+1} b_{n+1} = -1$

On a bien la relation de récurrence : $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$

27. Les suites (d_n) et (F_n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et ont les mêmes conditions initiales. Elles sont donc égales.

Problème 2

Partie I

28. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$

29. Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

30. $I_1 = \frac{1}{0+1} - I_0 = 1 - \ln(2)$

$I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

$I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{5}{6} - \ln(2)$

$I_4 = \frac{1}{4} - I_3 = -\frac{7}{12} + \ln(2)$

31. Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx$

Or la fonction sous l'intégrale est négative sur $[0, 1]$ et l'intégrale de 0 à 1 d'une fonction continue et négative est négative.

Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est bien décroissante.

32. De même la fonction sous l'intégrale qui définit I_n est positive, donc $I_n \geq 0$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

Soit l sa limite. D'après la Q29, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Si on fait tendre n vers $+\infty$, on obtient : $2l = 0$ d'où $l = 0$.

33. On va démontrer la relation par récurrence.

Initialisation : $I_1 = 1 - \ln(2)$ d'après la question 30. et $\sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^k}{k} = -1$: on bien $-I_1 = \ln(2) - 1$.

La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité : soit $n \geq 1$ fixé. On suppose que la propriété est vraie.

D'après Q29, $I_{n+1} = -I_n + \frac{1}{n+1}$ donc $(-1)^{n+1}I_{n+1} = (-1)^{n+2}I_n + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ et on utilise la propriété au rang n .

donc $(-1)^{n+1}I_{n+1} = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} = \ln(2) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \geq 1 \quad (-1)^n I_n = \ln(2) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}}$$

34. $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^n I_n - \ln(2)$

On peut faire tendre n vers l'infini : la suite des sommes partielles tend vers une valeur finie car I_n tend vers 0 donc la série converge.

On obtient alors : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$

Remarque : On pourrait le démontrer avec les séries alternées.

35. On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ et que (I_n) est décroissante ce qui donne les inégalités suivantes : $2I_{n+1} \leq I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$.

On obtient donc un encadrement de I_n :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{n}$$

On divise par $\frac{1}{2n}$ et, par encadrement, la limite du quotient $\frac{I_n}{\frac{1}{2n}}$ sera égale à 1 donc $I_n \sim \frac{1}{2n}$

Partie II

36. (a) $x \rightarrow \frac{P(x)Q(x)}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$ donc l'intégrale est bien définie et $\langle P, Q \rangle$ est bien un réel.

(b) Linéarité par rapport à la première variable.

Soient P_1, P_2, Q , 3 polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel.

$$\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \int_0^1 \frac{(\lambda P_1 + P_2)(x)Q(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{\lambda P_1(x)Q(x) + P_2(x)Q(x)}{1+x} dx$$

$$= \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x} dx \text{ car les deux intégrales existent.}$$

On a bien $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$.

(c) Symétrique :

$$\text{Soient } P \text{ et } Q, 2 \text{ polynômes de } \mathbb{R}[X] : \langle Q, P \rangle = \int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx = \langle P, Q \rangle.$$

En combinant les propriétés (b) et (c), on obtient la bilinéarité.

(d) Positive.

$$\text{Soit } P \text{ un polynôme. On calcule } \langle P, P \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)^2}{1+x} dx.$$

Comme vu précédemment l'intégrale de 0 à 1 d'une fonction positive est positive (un carré est positif!).

On a bien $\langle P, P \rangle \geq 0$.

(e) Définie .

Soit P tel que $\langle P, P \rangle = 0 \iff \int_0^1 \frac{P(x)^2}{1+x} dx = 0$.

Or l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle ssi la fonction est nulle.

On a donc : $\forall x \in [0, 1], \frac{P(x)^2}{1+x} = 0 \iff \forall x \in [0, 1], P(x) = 0$.

On obtient donc que P s'annule sur tout l'intervalle $[0, 1]$, ce qui fait que P admet une infinité de racines. On en déduit que P est le polynôme nul.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie bien toutes les propriétés du produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

37. $\langle 1, X \rangle = \int_0^1 \frac{1 \cdot x}{1+x} dx = I_1 \neq 0$. Donc 1 et X ne sont pas orthogonaux pour ce produit scalaire.

38. $L(X^2)$ est le projeté sur $\mathbb{R}_1[X]$. Il va donc se décomposer sur la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. α et β sont ses coordonnées (ils sont uniques).

39. On sait que $(X^2 - L(X^2))$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

On a donc $\langle X^2 - L(X^2), 1 \rangle = 0$ et $\langle X^2 - L(X^2), X \rangle = 0$.

On développe ces produits scalaires : $\langle X^2 - L(X^2), 1 \rangle = \int_0^1 \frac{x^2 - \alpha \cdot x - \beta}{1+x} dx = I_2 - \alpha I_1 - I_0 = 0$

et $\langle X^2 - L(X^2), X \rangle = \int_0^1 \frac{x^3 - \alpha \cdot x^2 - \beta x}{1+x} dx = I_3 - \alpha I_2 - I_1 = 0$

D'où le système demandé.

40. m est défini par la plus petite valeur pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(x^2 - (a \cdot x + b))^2}{1+x} dx$.

Or $\int_0^1 \frac{(x^2 - (\alpha \cdot x + \beta))^2}{1+x} dx = \|X^2 - P\|^2$ où $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Cela correspond à la définition de la distance (au carré) de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

On a donc $m = \inf \{ \|X^2 - P\|^2, P \in \mathbb{R}_1[X] \}$.

On sait que cette valeur sera minimale pour P égal au projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Donc $m = \|X^2 - L(X^2)\|^2$

Partie III

41. On pourra redémontrer que : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a, b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - a \cdot x - b)^2}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^4 + a^2 x^2 + b^2 - 2ax^3 - 2bx^2 + 2abx}{1+x} dx$

$f(a, b) = I_4 - 2aI_3 + (a^2 - 2b)I_2 + 2abI_1 + b^2I_0$

42. f est une fonction polynômiale en a et b . C'est donc bien une fonction C^1 sur \mathbb{R}^2 .

43. On cherche les points critiques en annulant le gradient.

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = -2I_3 + 2aI_2 + 2bI_1$$

$$\text{et } \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = -2I_2 + 2aI_1 + 2bI_0$$

En simplifiant par 2 on retrouve le même système qu'à la question 39.

On calcule le déterminant du système.

Il vaut $I_1^2 - I_0I_2 = -\frac{3}{2} \ln(2) + 1 \neq 0$ car $\ln(2)$ différent de $\frac{2}{3}$.

44. On trouve $\alpha = \frac{I_1I_2 - I_0I_3}{I_1^2 - I_2I_0}$ et $\beta = \frac{I_1I_3 - I_2^2}{I_1^2 - I_2I_0}$