

Partie I Une étude de séries.

Question I. 1. 1. Pour $k \geq 1$, considérons la série entière de terme général $u_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

Pour $x > 0$, on a $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| \rightarrow x$ quand $k \rightarrow \infty$, donc avec le critère de d'Alembert, si $x > 1$, on a absolue convergence de $\sum u_k(x)$ et si $x > 1$, on a divergence grossière de cette même série.

Ainsi $R = 1$, et la somme totale de la série entière est définie et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.

En $x = 1$, la série $\sum u_k(1)$ est une série de Riemann alternée vérifiant le thm spécifique (car $|u_k(1)| \rightarrow 0$ en décroissant) donc convergente. En $x = -1$, la série $\sum u_k(-1)$ est la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ divergente.

L est définie sur $]-1, 1[$. On reconnaît le D.S.E. de $\ln(1+x)$, et $L(x) = \ln(1+x)$ sur $]-1, 1[$

Question I. 1. 2. Pour $x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum u_k(x)$ est une série **alternée**, car $|u_k(x)| = \frac{x^k}{k}$.

Cette série alternée vérifie les hypothèses du **thm spécifique** car $|u_k(x)| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, et en décroissant avec $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| < 1$. On retrouve ainsi la convergence de la série $\sum u_k(x)$, sur $[0, 1]$, que l'on a déjà assurée, et le résultat complémentaire que le reste est majoré : $|L(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$

Ainsi, pour $n \geq 1$, en notant $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$, on a : $\forall x \in [0, 1], |L(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

Cette fonction est bornée, et $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \leq \frac{1}{n+1}$

Quand $n \rightarrow \infty$, on a donc que $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \rightarrow 0$,

et on a assuré la **convergence uniforme** de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$ vers L . Les S_n , qui sont des polynômes (sommes partielles d'une série entière) sont continues, et par le thm de continuité sous convergence uniforme,

L est continue sur $[0, 1]$ Alors $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x)$ donc $L(1) = \ln(2)$

Question I. 2. 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{q=1}^{q=p} a_{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+2}$ en distinguant les entiers k modulo 3.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{k=1}^{k=3p} a_k &= -\frac{2}{3} \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+2} = -\sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+2} \\ &= -\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=3p} \frac{1}{k} \text{ en retrouvant, cette fois, tous les entiers } k \text{ modulo 3.} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{k=3p} \frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}} \text{ par changement d'indice } k = p+h, \text{ et factorisation de } \frac{1}{p}.$$

Question I. 2. 2. Une **somme de Riemann** de la fonction f sur le segment $[a, b]$, qu'on partage en subdivision

équidistante, est $SR_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{h=1}^{h=n} f\left(a + h \frac{b-a}{n}\right)$, et on sait que pour f continue sur $[a, b]$, la suite

$(SR_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$. Il en est de même de la **suite extraite** $(SR_{2p}(f))_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ le segment $[a, b] = [0, 2]$ et $n = 2p$, on a donc que $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{p}$ et $a + h \frac{b-a}{n} = 1 + \frac{h}{p}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}} = \int_a^b f(t) dt = \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = \ln(3)$$

Notons A_n la somme partielle de $\sum a_n$: $A_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$.

On vient de montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} A_{3p} = \ln(3)$

Les deux suites de termes généraux $A_{3p+1} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}$ ont même limite, et les 3 suites extraites $(A_{3p})_{p \in \mathbb{N}^*}$, $(A_{3p+1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_{3p+2})_{p \in \mathbb{N}^*}$ tendent vers la même limite $\ln(3)$.

Ce qui assure que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et que la série $\sum a_n$ converge vers sa somme totale $\ln(3)$

Question I. 2. 3. Le réel $\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ vaut selon la classe de k modulo 3 : $\begin{cases} \text{si } k = 3p : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = 1 \\ \text{si } k = 3p + 1 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{si } k = 3p + 2 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} a_k, \text{ série qui converge et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Question I. 3. 1. Pour $t \in]0, 2\pi[$, on a $e^{it} \neq 1$ et $S_n(t)$ qui apparaît comme la somme des termes successifs de la suite géométrique de raison e^{it} , vaut donc
$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = \frac{e^{it} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}} = \varphi(t) [e^{(n+1)it} - e^{it}] \text{ sur }]0, 2\pi[$$

Question I. 3. 2. Sur $]0, 2\pi[$ le dénominateur de φ est non nul et de classe C^∞ , avec $e^{it} - 1 = \cos(t) - 1 + i \sin(t)$. La fonction φ est donc C^1 sur $]0, 2\pi[$ et sur le segment $[\pi, \alpha]$.

D'ailleurs $\varphi(t) = \frac{\cos(t) - 1 - i \sin(t)}{(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sin(t)}{2(1 - \cos(t))}$ en séparant parties réelle et imaginaire.

Note : L'hypothèse $\alpha \in [\pi, 2\pi[$ ne sert que pour l'écriture sans ambiguïté des segments $[\pi, \alpha]$, qu'on devrait écrire, à strictement parler, $[\alpha, \pi]$ si $0 < \alpha < \pi$, dans les questions suivantes.

Question I. 3. 3. Puisque φ est C^1 sur le segment $[\pi, \alpha]$, ainsi que la fonction $t \mapsto e^{(n+1)it}$, on peut effectuer une

intégration par partie : $\int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = \left[\frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} - \int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi, \alpha]$ donc bornées, respectivement par $M_\varphi = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi(t)|$ et

$$M_{\varphi'} = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi'(t)|$$

$$\text{et ainsi : } \left| \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt \right| \leq \left| \left[\frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} \right| + \left| \int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt \right| \leq \frac{2M_\varphi}{n+1} + \frac{|\alpha - \pi| M_{\varphi'}}{n+1}$$

Le numérateur est une constante réelle, donc
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = 0$$

Question I. 3. 4. Pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\pi}^{\alpha} e^{kit} dt \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{kit}}{ki} \right]_{\pi}^{\alpha} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha} - e^{ki\pi}}{k}$

$$\text{et } e^{ki\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k \text{ donc } \int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = -i \left[\sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right]$$

Mais aussi avec **I. 3. 1.** on a $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

On a assuré l'existence des limites des termes de droite quand $n \rightarrow \infty$, on assure donc la convergence de la série

$$\text{et la valeur de sa somme totale : } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ki\alpha}}{k} = -\ln(2) - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

Question I. 3. 5. Pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a $e^{it} \neq 1$ et $e^{it} \varphi(t) = \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{-i\frac{t}{2}} e^{it}}{e^{-i\frac{t}{2}} (e^{it} - 1)} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Question I. 3. 6. Ainsi $e^{it} \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2i \sin(\frac{t}{2})}$ et $\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}(\alpha - \pi) - i \left[\ln\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \right]_{t=\pi}^{t=\alpha}$
 $\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}(\alpha - \pi) - i \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. En séparant parties réelle et imaginaire, on a montré la convergence des deux séries et calculé leurs sommes totales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi - \alpha}{2} \quad \text{ce qui est vrai pour } \alpha \in]0, 2\pi[, \text{ en échangeant les bornes des intégrales.}$$

En particulier pour $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ln(\sqrt{3})$

on retrouve ainsi le résultat de **I. 2. 3.** **Note :** pour $\alpha = \pi$, on retrouve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Partie II Limite d'une intégrale.

Question II. 1. Si g est bornée par $M_g = \sup_{[0, \infty[} |g(t)|$, alors pour $x > 0$, on a $|f(t)g(xt)| \leq M_g |f(t)|$ si $t \in [0, \infty[$.

Puisque l'intégrale $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ converge, alors $\int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt$ converge et $\widetilde{f}_g(x)$ existe pour tout $x > 0$

De plus la fonction $\varphi_0 : t \mapsto M_g |f(t)|$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0, \infty[$, elle domine la fonction à deux variables : $F_g : (x, t) \mapsto f(t)g(xt)$, qui est continue par rapport à x à t fixé et continue par morceaux par rapport à t , à x fixé. On a ainsi les hypothèses du thm de continuité des intégrales à paramètres sous domination : $\widetilde{f}_g$ est continue sur $]0, \infty[$. Enfin : $\forall x > 0, |\widetilde{f}_g(x)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt \leq M_g \int_0^{\infty} |f(t)| dt$

donc $\widetilde{f}_g$ est bornée sur $]0, \infty[$

Question II. 2. 1. Si g est la fonction $t \mapsto e^{it}$, on a les hypothèses, de la question précédente, avec $M_g = 1$.

Par définition de la convergence d'une intégrale : $\int_0^{\infty} |f(t)| dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)| dt$ donc $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} |f(t)| dt = 0$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que $0 \leq \int_A^{\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$

Question II. 2. 2. Pour A ainsi fixé, on peut effectuer une intégration par partie, puisque les fonctions sont C^1 sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A e^{ixt} f(t) dt = \left[\frac{e^{ixt}}{ix} f(t) \right]_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \frac{e^{ixt}}{ix} f'(t) dt$$

Ainsi $\left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt$ et puisque A est fixé, le majorant est de la forme $\frac{K}{x}$

où K est constante. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ixt} f(t) dt = 0$

Question II. 2. 3. Assurons que $\lim_{x \rightarrow \infty} |\widetilde{f}_g(x)| = 0$, en montrant que $|\widetilde{f}_g(x)|$ peut être majoré par n'importe quel $2\varepsilon > 0$, pour x suffisamment grand. Considérons donc $\varepsilon > 0$, quelconque mais fixé.

- Pour ce $\varepsilon > 0$, avec **II. 2. 1.** il existe $A > 0$, tel que $\forall x > 0, \left| \int_A^{\infty} e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \int_A^{\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$

- Pour un A ainsi choisi, il existe $x_0 > 0$, tel que $\forall x \in]0, \infty[, (x \geq x_0) \Rightarrow \left(\left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$, tel que $\forall x \in]0, \infty[, (x \geq x_0) \Rightarrow \left(\left| \int_0^{\infty} e^{ixt} f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$.

On a donc montré que $\lim_{x \rightarrow \infty} |\widetilde{f}_g(x)| = 0$

Question II. 3. 1. Si g est la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$, on a les hypothèses de **II. 1.**, avec $M_g = 1$.

Pour $f = E$, la fonction E est C^1 sur $[0, \infty[$, à valeurs réelles et $\int_0^{\infty} |E(t)| dt$ existe et vaut 1.

La conclusion de **II. 2. 3.** est assurée. On peut calculer $\theta(\gamma)$ de **deux façons différentes** :

- En calculant $\int_0^{\pi} e^{\gamma y} e^{iy} dy = \left[\frac{e^{(\gamma+i)y}}{\gamma+i} \right]_{y=0}^{y=\pi}$ car $\gamma - i \neq 0$.

D'où $\int_0^\pi e^{\gamma y} e^{iy} dy = \frac{1}{\gamma + i} [e^{(\gamma+i)\pi} - 1] = \frac{i - \gamma}{\gamma^2 + 1} [e^{\gamma\pi} + 1]$ et donc $\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = \frac{e^{\gamma\pi} + 1}{\gamma^2 + 1}$

• En effectuant deux intégrations par partie successives, les fonctions étant C^1 sur le segment $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = [e^{\gamma y} (-\cos(y))]_{y=0}^{y=\pi} + \gamma \int_0^\pi e^{\gamma y} \cos(y) dy = e^{\gamma\pi} + 1 + \gamma \left[[e^{\gamma y} (\sin(y))]_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \gamma e^{\gamma y} \sin(y) dy \right]$$

d'où $\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = e^{\gamma\pi} + 1 - \gamma^2 \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$ et le même résultat.

Question II. 3. 2. On a $\widetilde{E}(x) = \int_0^\infty e^{-t} |\sin(xt)| dt$, intégrale convergente (II. 1.) dans laquelle on peut effectuer le changement de variable $\begin{pmatrix} u = xt \\ t \in]0, \infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = \frac{1}{x} u \\ u \in]0, \infty[\end{pmatrix}$ qui est C^1 -difféomorphe entre ces intervalles, donc conserve la convergence des intégrales et leur valeur.

Ainsi $\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$ pour tout $x > 0$

Question II. 3. 3. Avec le changement de variable (translation) $v = u - k\pi$, pour tout $x > 0$, on a $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \int_0^\pi e^{-\frac{v+k\pi}{x}} |\sin(v)| dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \int_0^\pi e^{-\frac{v}{x}} \sin(v) dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)$

Question II. 3. 4. On note $u_k = e^{-\frac{k\pi}{x}} = \left(e^{-\frac{\pi}{x}}\right)^k$, alors $\sum u_k$ est une série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}} \in]0, 1[$ donc absolument convergente, et sa somme totale est $\sum_{k=0}^\infty e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$ pour tout $x > 0$.

Question II. 3. 5. Avec la règle de Chasles, on peut décomposer l'intégrale sur $[0, (n+1)\pi]$ en somme totale d'une série d'intégrales sur les segments $[k\pi, (k+1)\pi]$, ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \frac{1}{x} \theta\left(-\frac{1}{x}\right) \sum_{k=0}^n e^{-\frac{k\pi}{x}}$$

Quand $n \rightarrow \infty$: $\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x} \theta\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$ sur $]0, \infty[$ ou $\widetilde{E}(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{x}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \right)$ sur $]0, \infty[$

Quand $x \rightarrow \infty$, $e^{-\frac{\pi}{x}} = 1 - \frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\widetilde{E}(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \left(\frac{2 + O\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)$ d'où $\lim_{x \rightarrow \infty} \widetilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$

Question II. 4. 1. a. Notons h_k la fonction $t \mapsto \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. Pour $k \geq 1$, la fonction h_k est paire, π -périodique,

de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bornée : $N_\infty(h_k) = \sup_{\mathbb{R}} |h_k(t)| = \frac{1}{4k^2 - 1}$.

La série $\sum \frac{1}{4k^2 - 1}$ est convergente par équivalence à une série de Riemann $\sum \frac{1}{4k^2}$ d'exposant $2 > 1$, donc la série des fonctions $\sum h_k$ est **normalement convergente** sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente : par continuité de chaque h_k , la somme totale h est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Question II. 4. 1. b. La fonction $g : t \mapsto |\sin(t)|$ est continue, de classe C^1 par morceaux, paire et π -périodique. On peut déterminer son développement en série de Fourier et appliquer le thm complémentaire au thm de Dirichlet, qui assure la convergence normale de la série de Fourier de g vers g , sur $\mathbb{R}$.

Calculons les coefficients de Fourier de g . On a la période $T = \pi$, la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ et :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(g) = 0$, par parité.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\sin(t)| \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(2nt) dt$, par parité.

$$\begin{aligned} \text{D'où } a_n(g) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)] dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\left[\frac{-\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{-\cos((2n-1)t)}{2n-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{4n^2-1} \right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Dans l'introduction, nous avons assuré les hypothèses du thm de Dirichlet qui assure que la série de Fourier de g converge sur $\mathbb{R}$, de somme totale $S(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \cos(n\omega t) + b_n(g) \sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

qui égale $g(t)$ sur $\mathbb{R}$, donc que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)}$

Question II. 4. 2. Si de plus f est de classe C^1 sur $[0, \infty[$, on a pour tout $x > 0$:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} f(t) |\sin(xt)| dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(xt) \right] dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kxt)}{4k^2-1} \right] dt$$

où l'on voit apparaître l'intégrale d'une série des fonctions $\sum f h_k$. Chacune de ces fonctions est C^0 sur $\mathbb{R}$, la série converge simplement (et même normalement) sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto f(t) h(xt)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Chacune des fonctions est intégrable, car $|f(t) h_k(t)| = \frac{|\cos(2kxt)|}{4k^2-1} |f(t)| \leq |f(t)|$ intégrable sur $[0, \infty[$ et la série des intégrales $\int_0^{\infty} |f(t) h_k(t)| dt \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$ converge par comparaison à la série $\sum \frac{K}{k^2}$.

Les divers hypothèses du thm d'intégration terme à terme sont assurées, et on a donc, chaque intégrabilité étant

assurée, que $\boxed{\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt \text{ pour tout } x > 0}$

Considérons la série de fonctions $v_k : x \mapsto \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt$ définies et continues sur $]0, \infty[$.

Avec **II. 2. 3.** on sait que $\lim_{x \rightarrow \infty} v_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt = 0$, et $N_{\infty}(v_k) \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série des fonctions $\sum v_k$ converge normalement sur $]0, \infty[$, donc uniformément. On peut donc appliquer le **thm de la double limite** à la suite des sommes partielles, et assurer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 0$.

Enfin, on peut conclure que $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt}$ Ce qui est conforme au résultat obtenu pour E .

Question II. 4. 3. 1. Si on effectue le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale, pour $0 \leq \beta < \delta$, on a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du.$$

$\frac{\beta x}{\pi}$ et $\frac{\delta x}{\pi}$ sont deux réels positifs et pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$ on a $\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} = \frac{(\delta - \beta)x}{\pi} > 1$.

Il existe donc deux entiers p et q tels que $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ partie entière de } \frac{\beta x}{\pi} \text{ donc } p \leq \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \text{ partie entière de } \frac{\delta x}{\pi} \text{ donc } q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \\ \text{et } 0 \leq p < q \end{array} \right.$

Ainsi $p\pi \leq \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leq \delta x < (q+1)\pi$ donc $\boxed{[(p+1)\pi, q\pi] \subset [\beta x, \delta x] \subset [p\pi, (q+1)\pi]}$

Puisque la fonction qu'on intègre est positive et continue sur $\mathbb{R}$, on a l'encadrement entre les intégrales :

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du \leq \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du \leq \int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du = \int_0^{\pi} |\sin(v)| dv = \int_0^{\pi} \sin(v) dv = 2$ avec $v = u - k\pi$

Ainsi $\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du = 2(q-p-1)$ et $\int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du = 2(q+1-p)$

d'où un encadrement de $F(x)$: $\boxed{\frac{2}{x}(q-p-1) \leq F(x) \leq \frac{2}{x}(q-p+1) \text{ pour } x > \frac{\pi}{\delta - \beta}}$

Mais $\begin{cases} p \leq \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -(p+1) < -\frac{\beta x}{\pi} \leq -p \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ et $\begin{cases} q-p < \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 1 \\ \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 1 < q-p \end{cases}$
ainsi $\frac{2}{x} \left(\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 2 \right) \leq F(x) \leq \frac{2}{x} \left(\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 2 \right)$ pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$ et quand $x \rightarrow \infty$, par le thm d'encadrement (thm "des gendarmes" ou "du sandwich"), on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \text{ existe et vaut } \frac{2}{\pi} (\delta - \beta)}$

Question II. 4. 3. 2. Selon les cas, par extension de résultats successifs.

- Si f est une **fonction en escalier** et J un **segment**, alors il existe une subdivision $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ de J telle que f soit constante égale à y_k sur chacun des intervalles $]\beta_k, \beta_{k+1}[$.

$$\text{Donc } \tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(xt)| dt = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f(t) |\sin(xt)| dt = \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} |\sin(xt)| dt$$

Cette combinaison linéaire de fonctions ayant des limites quand $x \rightarrow \infty$ a une limite qui vaut :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \frac{2}{\pi} (\beta_{k+1} - \beta_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k (\beta_{k+1} - \beta_k) \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt}$$

- Si f est **continue par morceaux** sur J un **segment**, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur J vers f . Ainsi $N_\infty^J(f - \varphi_n) = \sup_J |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Les applications $f \mapsto \tilde{f}$ et $f \mapsto \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$ sont linéaires, donc pour la différence (où $x > 0$) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt &= [\tilde{f}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x)] + [\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt] + [\frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt] \\ &= \widetilde{f - \varphi_n}(x) + [\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt] + \frac{2}{\pi} \int_J [\varphi_n(t) - f(t)] dt \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| \leq L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n) + \left| \widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt \right| + \frac{2}{\pi} L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n)$$

où $L(J)$ est la **longueur** du segment J . Par la convergence uniforme sur J , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0

$$\text{tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow \left(N_\infty^J(f - \varphi_n) < \frac{\varepsilon}{L(J)(1 + \frac{2}{\pi})} \right) \Rightarrow (L(J)(1 + \frac{2}{\pi}) N_\infty^J(f - \varphi_n) < \varepsilon)$$

Pour un $\varepsilon > 0$, fixons donc un tel $n = n_0$. Pour ce n_0 , puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt$, il existe un x_0 tel

$$\text{que pour tout } x \geq x_0 \text{ on ait } \left| \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous assurons qu'il existe $x_0 > 0$, t. q. $\forall x > 0, (x \geq x_0) \Rightarrow \left(\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$

$$\text{donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt}$$

- Si f est **continue par morceaux** sur $J = [0, \infty[$, on peut reprendre pour un $\varepsilon > 0$ donné, le raisonnement de la question **II. 2.** avec un A suffisamment grand pour que $\int_A^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_{[0, \infty[} f(t) dt \right| &= \left| \int_0^\infty f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| + \left| \int_A^\infty f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_A^\infty f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| + \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \int_A^\infty |f(t)| dt \end{aligned}$$

Pour ce A ainsi choisi, avec le segment $J' = [0, A]$ et le résultat ci-dessus, il existe x_0 tel que

$$\forall x > 0, (x \geq x_0) \Rightarrow \left(\left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$$

et alors $\forall x > 0, (x \geq x_0) \Rightarrow \left(\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < \left(2 + \frac{2}{\pi} \right) \varepsilon \right).$

$$\text{Et on a donc assuré de même que } \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt}$$