

e3a Polytech Corrigé de l'épreuve spécifique Filière PSI

Exercice 1

1. (a) On développe $(1 + X)^{2n}$ par la formule du binôme, ce qui fournit sa décomposition dans la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Le terme qui nous intéresse est $\binom{2n}{n}X^n$. Ainsi, le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.

(b) On écrit :

$$\begin{aligned} (1 + X)^{2n} &= (1 + X)^n(1 + X)^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) \times \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} X^l \right) \\ &= \sum_{(k,l) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \binom{n}{k} X^k \binom{n}{l} X^l \\ &= \sum_{(k,l) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \binom{n}{k} \binom{n}{l} X^{k+l} \end{aligned}$$

Les termes qui nous intéressent sont ceux pour lesquels $k + l = n$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} X^n$.

Ainsi, le coefficient de X^n dans le polynôme $(1 + X)^{2n}$ est aussi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

(c) On en déduit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2. Cette matrice est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité, sont ses éléments diagonaux a et c .

Si $a \neq c$, cette matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Si $a = c$, elle n'est pas diagonalisable, car si elle l'était, elle serait semblable à une matrice d'homothétie, donc égale à une matrice d'homothétie, ce qui n'est pas le cas.

Finalement, la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & c \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $a \neq c$.

3. D'après la question précédente, $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}$ est l'évènement $(Y \neq Z)$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = Z) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}((Y = k) \cap (Z = k)) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(Z = k) \text{ par indépendance de } Y \text{ et de } Z \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est diagonalisable}\}) = 1 - \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

4. La matrice étant triangulaire, elle est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Ainsi l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ est inversible}\}$ est $(Y > 1) \cap (Z > 1)$.

Par indépendance et identique distribution, la probabilité cherchée vaut $\mathbb{P}(Y > 1)^2$, ou encore

$$(1 - \mathbb{P}(Y = 0))^2 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

Exercice 2

Questions préliminaires

1. On distingue trois cas :

— $\alpha = -\omega^2$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$: la solution générale s'écrit alors

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

— $\alpha = 0$: la solution générale s'écrit alors

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto At + B, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

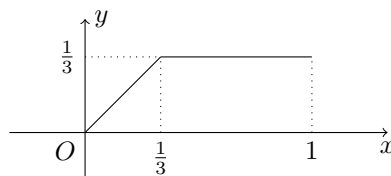
— $\alpha = \omega^2$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$: la solution générale s'écrit alors

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t), \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

2. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, H est la primitive nulle en a de la fonction continue h . A ce titre, elle est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et sa dérivée est la fonction h .

3. Cas particuliers

- (a) La fonction est aussi définie par $t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{3} & \text{sinon} \end{cases}$. D'où le graphe :



- (b) On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt &= \int_0^{\frac{1}{3}} \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} t dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

- (c) Plus généralement, toujours avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \min(x, t) dt &= \int_0^x \min(x, t) dt + \int_x^1 \min(x, t) dt \\
&= \int_0^x t dt + \int_x^1 x dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x + x \cdot (1 - x) \\
&= \frac{x^2}{2} + x - x^2 \\
&= \frac{1}{2}x(2 - x)
\end{aligned}$$

4. (a) Question clé!

Tout d'abord, pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto \min(x, t)$ est définie et continue sur $[0, 1]$, donc il en est de même de $t \mapsto \min(x, t)f(t)$, et l'intégrale $\min(x, t)f(t)$ existe : la fonction F est bien définie sur $[0, 1]$.

Ensuite, par la relation de Chasles, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \min(x, t)f(t)dt + \int_x^1 \min(x, t)f(t)dt \\
&= \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 f(t)dt
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ étant la primitive nulle en 0 de $t \mapsto tf(t)$, elle est de classe C^1 et a pour dérivée $x \mapsto xf(x)$.

La fonction $x \mapsto \int_x^1 f(t)dt = \int_1^x -f(t)dt$ est la primitive nulle en 1 de $t \mapsto -f(t)$; elle est de classe C^1 et a pour dérivée $-f$.

Ainsi F est de classe C^1 comme combinaison de telles fonctions, et, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$F'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \int_x^1 f(t)dt.$$

(b) On trouve $F(0) = F'(1) = 0$.

(c) D'après l'expression de F' obtenue à la question 4.1, F est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et $F'' = -f$.

5. T est linéaire, essentiellement par linéarité de l'intégrale, et, pour tout $f \in E$, $T(f)$ est la fonction F étudiée à la question 4, qui est en particulier continue sur $[0, 1]$. Donc T est bien un endomorphisme de E .

6. Si, pour $f \in E$, $T(f)$ est la fonction nulle, alors $T(f)''$ est aussi la fonction nulle. Or, d'après la question 4.3, $T(f)'' = -f$: f est donc la fonction nulle.

Ainsi, $\ker(T) = \{0_E\}$ et T est un endomorphisme injectif de E .

7. On pose $A = \{G \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid G(0) = G'(1) = 0\}$.

(a) C'est le résultat de la question 4.2.

(b) D'après la question 4.1, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
T(G'')(x) &= \int_0^x tG''(t)dt + x \int_x^1 G''(t)dt \\
&= [tG'(t)]_0^x - \int_0^x G'(t)dt + x[G'(t)]_x^1 \\
&= xG'(x) - G(x) + G(0) + x(G'(1) - G'(x)) \\
&= -G(x)
\end{aligned}$$

Finalement, $T(G'') = -G$.

(c) Soit $G \in A$. D'après la question précédente, $G = T(-G'') \in \text{Im}(T)$.

Finalement, $\text{Im}(T) = A$.

8. Recherche des éléments propres de T

(a) D'abord, la question 6 permet d'affirmer que, si λ est une valeur propre de T , alors λ est non nulle. Supposons par l'absurde que T admette une valeur propre λ strictement négative, et notons $f \in E$ un vecteur propre associé.

Puisque $T(f)'' = -f$, et $T(f) = \lambda f$, alors f est solution de l'équation différentielle :

(b) Les colonnes de U_X sont toutes proportionnelles à X . Le vecteur X étant non nul, U_X est de rang 1, et $\text{Im}(U_X) = \mathbb{R} \cdot X$.

(c) $\ker(U_X)$ est l'ensemble des vecteurs $Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $U_X Y = 0$, soit $XX^T Y = 0$, soit encore $X(X^T Y) = 0$, puis $(X^T Y)X = 0$ car $X^T Y$ est un réel, et enfin $X^T Y = 0$ car le vecteur X est non nul.

$\ker(U_X)$ est donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à X , c'est-à-dire à $\text{Im}(U_X)$.

En particulier, $\ker(U_X)$ et $\text{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux...

(d) ... et , puisque $\ker(U_X) = \text{Im}(U_X)^\perp$, $\ker(U_X)$ et $\text{Im}(U_X)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{R}^n .

(e) Classique !

$U_X^2 = XX^T XX^T = (X^T X)XX^T = \text{tr}(U_X)U_X : U_X$ annule le polynôme $X^2 - \text{tr}(U_X)X$.

(f) Une base adaptée à la décomposition de la question 2d est composée de $n - 1$ vecteurs de $\ker(U_X)$ et d'un vecteur \tilde{X} non nul colinéaire à X , dont l'image par u_X est $XX^T \tilde{X} = \text{tr}(U_X)\tilde{X}$.

Ainsi, dans cette base, la matrice de u_X est la matrice diagonale D d'éléments diagonaux tous nul, sauf le dernier égal à $\text{tr}(U_X) = X^T X = \sum_{k=0}^n x_k^2$.

3. Ici, $M = I_n + \alpha U_X$. Les valeurs propres de M sont donc 1, d'ordre de multiplicité $n - 1$, et $1 + \alpha X^T X$, simple.

Directement, puisqu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $U_X = PDP^T$, $M = P(I_n + \alpha D)P^T$, et M est semblable à $\text{diag}(1, \dots, 1, 1 + \alpha X^T X)$.

4. Cas général :

(a) i. $MX = (I_n + \alpha U_X + \beta U_Y)X = (1 + \alpha X^T X)X + \beta(Y^T X)Y$.

ii. De même, $MY = (1 + \beta Y^T Y)Y + \alpha(X^T Y)X$. On constate donc que $f(X)$ et $f(Y)$ sont dans F , ce qui prouve que F est stable par f .

(b) Puisque M est une matrice symétrique réelle, f est un endomorphisme symétrique. Par résultat de cours, on en déduit que, puisque F est stable par f , F^\perp est stable par f .

Pour tout $Z \in F^\perp$,

$$\begin{aligned} f(Z) &= MZ \\ &= (I_n + \alpha U_X + \beta U_Y)Z \\ &= Z + \alpha XX^T Z + \beta YY^T Z \\ &= Z + \alpha(X|Z)X + \beta(Y|Z)Y \\ &= Z \end{aligned}$$

Donc f induit l'identité sur F^\perp .

(c) i. Les calculs de MX et MY effectués précédemment prouvent que G est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F dans la base (X, Y) .

ii. On trouve $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$

iii. Puisque f est diagonalisable et que F est stable par f , l'endomorphisme induit par f sur F est lui aussi diagonalisable (c'est un résultat de cours...). Donc G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont bien sûr réelles.

iv. Tout d'abord, $G = I_2 + \begin{pmatrix} \alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$, de telle sorte qu'il suffit de calculer les valeurs propres de $H = \begin{pmatrix} \alpha\|X\|^2 & \alpha(X|Y) \\ \beta(X|Y) & \beta\|Y\|^2 \end{pmatrix}$, et de leur ajouter 1.

On calcule alors le polynôme caractéristique de cette dernière matrice :

$$\begin{aligned} \chi_H(t) &= t^2 - (\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)t + \alpha\beta(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2) \\ &= \left(t - \frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2}\right)^2 + \alpha\beta(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2) - \frac{(\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)^2}{4} \\ &= \left(t - \frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(-4\alpha\beta(\|X\|^2\|Y\|^2 - (X|Y)^2) + (\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2)^2) \\ &= \left(t - \frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(4\alpha\beta(X|Y)^2 + (\alpha\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2) \end{aligned}$$

On obtient alors les valeurs propres de H :

$$\frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2} \pm \frac{\sqrt{4\alpha\beta(X|Y)^2 + (\alpha\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2}}{2},$$

puis celles de G :

$$1 + \frac{\alpha\|X\|^2 + \beta\|Y\|^2}{2} \pm \frac{\sqrt{4\alpha\beta(X|Y)^2 + (\alpha\|X\|^2 - \beta\|Y\|^2)^2}}{2}.$$

(d) Les valeurs propres de la matrice M sont 1 d'odm $n - 2$, et les valeurs propres de G .

Exercice 4

1. (a) i. $(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$.

ii. On pose $t = 1 - h$. Alors

$$\begin{aligned} 1 - t^\alpha &= 1 - (1-h)^\alpha \\ &= 1 - \left(1 - \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)\right) \\ &= \alpha h - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &\sim \alpha h \text{ quand } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Finalement, $1 - t^\alpha \sim \alpha(1-t)$ quand $t \rightarrow 1$.

(b) C'est une intégrale de Riemann sur un intervalle borné. Donc $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^\beta} dt$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

(c) La fonction $t \mapsto \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est définie et continue sur $[0, 1[$, à valeurs positives.

$$\frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} \text{ quand } t \rightarrow 1.$$

Puisque $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < 1$, et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} dt$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ converge.

2. Démonstration d'un encadrement

(a) Par étude de la fonction $t \mapsto e^t - 1 - t$, on montre que pour tout réel $t : 1 + t \leq e^t$.

On étudie ensuite la fonction $t \mapsto 1 + t + \frac{t^2}{2} - e^t$, qui est dérivable sur \mathbb{R}_- et dont la dérivée est $t \mapsto 1 + t - e^t$. D'après la première inégalité, cette dérivée est négative, donc la fonction est décroissante, de $+\infty$ en $-\infty$ à 0 en 0. Elle est donc à valeurs positives sur \mathbb{R}_- .

(b) i. Là encore, on étudie sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ la fonction $g_p : u \leq 0 \mapsto e^u - \sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u^k}{k!}$.

C'est une fonction de classe C^∞ , dont la dérivée est définie par :

$$\forall u \leq 0, \quad g'_p(u) = e^u - \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{k u^{k-1}}{k!} = e^u - \sum_{k=0}^{2p} \frac{u^k}{(k)!}.$$

D'après l'hypothèse, $e^u \leq U_{2p}$ pour tout $u \leq 0$, ce qui prouve que g_p est une fonction décroissante. Valant 0 en 0, on en déduit que g_p est à valeurs positives, ce qui fournit l'égalité attendue.

ii. Ici, on étudie la fonction $g_p : u \leq 0 \mapsto \sum_{k=0}^{2p+2} \frac{u^k}{k!} - e^u$, qui est dérivable, de dérivée $u \leq 0 \mapsto$

$\sum_{k=0}^{2p+1} \frac{u^k}{k!} - e^u$, négative d'après la question précédente. Étant encore nulle en 0, décroissante, on en déduit qu'elle est à valeurs positives.

(c) On démontre alors par récurrence sur l'entier p que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall u \leq 0, \quad U_{2p+1} \leq e^u \leq U_{2p}.$$

La question 2.1 est l'initialisation, la 2.2 l'hérédité.

3. C'est une conséquence de l'inégalité précédente, en prenant $u \leftarrow \frac{1}{n} \ln(t)$, en retranchant 1 et en multipliant tout par -1 , ce qui a pour effet de renverser les inégalités.

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n} \ln(t) \right)^k \leq 1 - \exp \left(\frac{1}{n} \ln(t) \right) \leq 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n} \ln(t) \right)^k.$$

4. La fonction $t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ est définie et continue sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0$, $\sqrt{t} |\ln(t)|^p \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $|\ln(t)|^p = o_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$. Puisque $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

converge, on en déduit par comparaison que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ existe.

Quand $t \rightarrow 1$, $\frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{(1-t)^{1-p+\frac{1}{n}}}$. Pour $p \geq 1$, $1-p+\frac{1}{n} < 1$, donc l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-p+\frac{1}{n}}}$

converge, et par comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ converge.

Finalement, $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ converge.

5. On applique l'inégalité obtenue à la question 3 avec $p = 2$. Il vient :

$$-\frac{1}{n} \ln(t) - \frac{1}{2n^2} (\ln(t))^2 \leq 1 - t^{\frac{1}{n}} \leq -\frac{1}{n} \ln(t).$$

On multiplie par $\frac{1}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$, puis on intègre entre 0 et 1, toutes les intégrales étant convergentes, pour obtenir :

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt - \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt.$$

6. On utilise ici le théorème de convergence dominée, appliquée à la suite de fonctions $f_n : t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

— Pour tout $n \geq 2$, f_n est définie et continue sur $]0, 1[$.

— La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{\ln^p(t)}{1-t}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

— La limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ est continue sur $]0, 1[$.

— Pour tout $n \geq 2$, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$|f_n(t)| = \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} \leq \frac{|\ln(t)|^p}{1-t} \times \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{\frac{3}{2}}},$$

car $\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{n}}} = \exp \left(\frac{1}{n} (-\ln(1-t)) \right) \leq \exp \left(\frac{1}{2} (-\ln(1-t)) \right)$ quand $n \geq 2$, et la fonction $t \mapsto \frac{|\ln(t)|^p}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt \right) = \int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{1-t} dt.$

7. On multiplie par n l'inégalité obtenue à la question 5, et on fait tendre n vers $+\infty$.

Le membre de gauche, à savoir $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}} dt$ tend vers $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$, comme le membre de droite.

Par encadrement, on en déduit que $\lim_n n\gamma_n = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt.$

8. La fonction $t \mapsto -\ln(t)t^p$ est définie continue sur $]0, 1]$, prolongeable par continuité en 0 si $p \geq 1$. Comme $t \mapsto -\ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après le cours, on en déduit que, pour tout entier naturel p , l'intégrale

$$\int_0^1 -\ln(t)t^p dt \text{ existe.}$$

9. $\int_0^1 -\ln(t)dt = [t - t \ln(t)]_0^1 = 1$.

$$\text{Si } p \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 -\ln(t)t^p dt = \left[-\ln(t) \frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \frac{1}{p+1} \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{(p+1)^2}.$$

10. On applique le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions intégrables à la série de fonctions $\sum_p g_p$, où $g_p : t \mapsto -\ln(t)t^p$.

— Chaque fonction g_p est intégrable sur $]0, 1]$.

— La série de fonctions $\sum_{p \geq 0} g_p$ converge simplement sur $]0, 1]$ et a pour somme la fonction $t \mapsto \frac{-\ln(t)}{1-t}$, continue sur $]0, 1[$.

— La série $\sum_{p \geq 0} \int_0^1 |g_p(t)| dt$ est la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)^2}$, convergente.

$$\text{On en déduit que } \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}.$$

11. On a montré que $n\gamma_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + o_{n \rightarrow \infty}(1)$, ou encore :

$$\gamma_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

FIN