

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

NOTATIONS

Si E est un espace vectoriel euclidien (de dimension quelconque), et si (x,y) appartient à E², les notations (x|y), ||x||, désignent respectivement le produit scalaire des vecteurs x et y, et la norme euclidienne du vecteur x.

L'objet du problème est l'étude de certaines propriétés des endomorphismes symétriques de E, c'est-à-dire des endomorphismes u de E tels que l'on ait : (u(x)|y) = (x|u(y)) pour tout (x,y) appartenant à E².

Si u est un endomorphisme de E, on désigne par :

- $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u (éventuellement vide)
- $S(u)$ l'ensemble des réels λ tels que $u - \lambda 1_E$ ne soit pas inversible (1_E désignant l'application identique de E).
- E_λ^u l'espace propre de u associé au réel λ (si λ appartient à $\Lambda(u)$).

On note $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace vectoriel réel des applications linéaires continues de E dans E, et B la boule unité fermée de E. On rappelle que $\mathcal{L}_c(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bornés sur B ; pour u appartenant à $\mathcal{L}_c(E)$ on note |||u||| le réel défini par :
|||u||| = $\sup_{x \in B} ||u(x)||$, ce qui permet de considérer l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}_c(E), ||| \quad |||)$.

PARTIE I

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie, non nulle, et on désigne par Q l'ensemble des formes quadratiques sur E.

I - 1. Munir Q d'une structure d'espace vectoriel réel ; exprimer sa dimension à l'aide de celle de E.

I - 2. Soit q un élément de Q .

a) Montrer qu'il existe, et de façon unique, un endomorphisme symétrique u_q de E tel que l'on ait $q(x) = (u_q(x) | x)$ pour tout x de E.

b) Montrer que $\sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{|(u_q(x) | x)|}{||x||^2} \right)$ est un réel, que l'on note n(q),

et que l'application $q \mapsto n(q)$ de Q dans l'ensemble des réels positifs ou nuls est une norme.

.../...

c) Exprimer le réel $n(q)$ à l'aide des éléments de $S(u_q)$.

d) En déduire que l'on a :
$$n(q) = \sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{\|u_q(x)\|}{\|x\|} \right)$$

I - 3. Dans cette question seulement, on donne un entier N strictement positif, et l'on considère $E = \mathbb{R}^{2N}$ muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme symétrique de E dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$\begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ I_N & 0_N \end{pmatrix}$$

I_N est la matrice unité d'ordre N
 où : 0_N est la matrice nulle d'ordre N

Montrer qu'il existe, et de façon unique, un élément q de Q tel que $u = u_q$. Déterminer la signature de q et la valeur du réel $n(q)$.

I - 4. On désigne par Q^+ l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur E ; montrer que Q^+ est un ouvert de l'espace vectoriel normé (Q, n) . [On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'équivalence, pour q élément de Q : $q \in Q^+ \iff \inf_{\|x\|=1} (q(x)) > 0$].

PARTIE II

On ne fait plus désormais l'hypothèse que E est de dimension finie. Dans toute cette partie, on considère un endomorphisme symétrique u de E , élément de $\mathcal{L}_c(E)$, non nul.

II - 1. Montrer l'inégalité $\sup_{x \in B} |(u(x)|x)| \leq \|u\|$,

et l'égalité : $\|u\| = \sup_{(x,y) \in B^2} |(u(x)|y)|$

II - 2. En déduire que : $\|u\| = \sup_{x \in B} (|(u(x)|x)|) = \sup_{x \in E - \{0\}} \left(\frac{|(u(x)|x)|}{\|x\|^2} \right)$

[On pourra désigner par M la borne supérieure des $|(u(x)|x)|$ pour x dans B et montrer que $\|u\| \leq M$].

II - 3. On suppose dans tout ce qui suit que u vérifie la propriété suivante :

(P) : L'adhérence de $u(B)$ dans E est une partie compacte de E , ce qui veut dire que de toute suite de $u(B)$ on peut extraire une suite qui converge dans E .

II - 3. A - Etude d'un exemple

E est ici l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par :

$(\forall (f,g) \in E^2) : (f|g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

Soit $K(x,y)$ un polynôme aux deux indéterminés x et y , symétrique, ($K(x,y) = K(y,x)$) et à coefficients réels.

Pour tout f appartenant à E , on désigne par $u(f)$ l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$(\forall t \in [0,1]) : (u(f)(t) = \int_0^1 K(x,t) f(x) dx) .$$

a) Montrer que $u(f)$ est un élément de E et que l'application $f \mapsto u(f)$ de E dans E est linéaire et continue.

b) Démontrer que l'endomorphisme u est symétrique et que l'image $u(E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

c) En déduire que u vérifie la propriété (P) .

II - 3. B - On revient au cas général, c'est-à-dire qu'on suppose à nouveau E quelconq

a) Quitte à changer u en $-u$, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points dans E qui vérifie :

$$(1) : (\forall n \in \mathbb{N}) (\|x_n\| = 1)$$

$$(1,1) : \lim_{n \rightarrow \infty} (u(x_n) | x_n) = \|u\|$$

$$(1,1,1) : \text{il existe } y \text{ dans } E \text{ tel que : } \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = \|u\| y$$

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y et en déduire que y est vecteur propre de u associé au réel $\|u\|$.

II - 4. a) Si v appartient à $\mathcal{L}_c(E)$, et N appartient à \mathbb{N} , on pose :

$w_N = \sum_{p=0}^N (-1)^p v^p$ où $v^p = v \circ \dots \circ v$ est l'itérée p fois de v , avec en particulier $v^0 = 1_E$. Montrer que si $\|v\| < 1$, la suite de terme général w_N est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E) ; \| \cdot \|)$.

b) Calculer le produit $(1_E + v) \circ w_N$.

On suppose dans tout ce qui suit que $(\mathcal{L}_c(E) ; \| \cdot \|)$ est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E) , \| \cdot \|)$ converge dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Montrer qu'alors, si v dans $\mathcal{L}_c(E)$ vérifie $\|v\| < 1$, l'endomorphisme $1_E + v$ est inversible.

c) Déduire de ce qui précède que $S(u)$ est une partie compacte non vide de \mathbb{R} contenue dans l'intervalle $[- \|u\| , \|u\|]$.

... / ...

II - 5. Soit ϵ un réel strictement positif ; on suppose que l'ensemble $\{ \lambda \in \Lambda(u) : |\lambda| > \epsilon \}$ est infini .

a. Montrer que si existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\Lambda(u)$, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E qui vérifient :

- (i) : $(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2) (p \neq q \implies \lambda_p \neq \lambda_q)$.
- (i,i) : Il existe un réel λ non nul tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$.
- (i,i,i) : Pour tout entier n , x_n appartient à $E_{\lambda_n}^u$
- (i v) : $(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2) (p \neq q \implies \| x_p - x_q \| = \sqrt{2})$.
- (v) : La suite de terme général $u(x_n)$ est convergente.

b) Aboutir à une contradiction ; en déduire le résultat suivant :

- ou bien $\Lambda(u)$ est fini
- ou bien il existe une bijection $n \longmapsto \lambda_n$ de \mathbb{N} sur $\Lambda(u)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

II - 6. On suppose que u est inversible dans $\mathcal{L}_c(E)$ et que la forme quadratique $q : x \longmapsto (u(x) | x)$ est positive et n'admet pas de vecteur isotrope autre que 0 .

Montrer, à l'aide des résultats précédents, que $\Lambda(u)$ est une partie finie de l'ensemble des réels strictement positifs.
