

Partie I : préliminaires

I.1) On a $u'' = Vu - f$ donc u'' est continue. Par conséquent u est de classe $\mathcal{C}^2$. On prouve par récurrence, à l'aide du même argument, que u est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ pour tout k , donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.

I.2) V et f sont continues sur $[0, 1]$, donc le problème de Cauchy, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

$$\begin{cases} u'' - Vu &= -f \\ u(0) &= a \\ u'(0) &= b \end{cases}$$

possède une unique solution sur $[0, 1]$, pour tout couple (a, b) de réels. Si $c - V(0)a = -f(0)$ le problème posé possède une solution unique, sinon il n'en possède pas.

I.3) Non ! Les conditions aux limites ne portent pas sur les valeurs de u et de u' en un point x_0 de $[0, 1]$.

I.4) Si $x < x_0$ (et de tels x existent car $x_1 < x_0$) $v(x) \geq v(x_0)$ donc $\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Par passage à la limite $v'(x_0) \leq 0$. En considérant le cas $x > x_0$, $v'(x_0) \geq 0$. Finalement $v'(x_0) = 0$.

On applique maintenant la formule de Taylor-Young :

$$v(x) = v(x_0) + 0(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}v''(x_0) + o((x - x_0)^2)$$

Pour $x \neq x_0$, puisque $v(x) \geq v(x_0)$, en divisant par $(x - x_0)^2$ et en faisant tendre x vers x_0 on obtient $v''(x_0) \geq 0$.

Partie II

II.1)

– $u''(x_0) + f(x_0) = V(x_0)u(x_0)$. Or $u''(x_0) \geq 0$, $f(x_0) \geq 0$ et $V(x_0) > 0$ donc $u(x_0) \geq 0$.
– u est continue sur $[0, 1]$, elle atteint un minimum global en x_0 . Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ alors pour tout x $u(x) \geq 0 = u(0) = u(1)$. Si $x_0 \in]0, 1[$ alors $u(x_0) \geq 0$ d'après le début de la question. On a toujours pour tout x $u(x) \geq u(x_0) \geq 0$.

II.2) Il suffit de remarquer que u_0 est solution de $-u'' + Vu = f$ si et seulement si $-u_0$ est solution de $-u'' + Vu = -f$ et que u_0 vérifie (4) si et seulement si $(-u_0)$ vérifie (4).

II.3) Soit b_1 et b_2 deux réels et t dans $\mathbb{R}$ et $b = (1 - t)b_1 + tb_2$. Soit $v = (1 - t)u_{b_1} + tu_{b_2}$. On a $v(0) = 0$, $v'(0) = b$ et $-v'' + Vv = (1 - t)f + tf = f$. Par unicité du problème de Cauchy $v = u_b$. En particulier

$$\phi(b) = v(1) = (1 - t)u_{b_1}(1) + tu_{b_2}(1) = (1 - t)\phi(b_1) + t\phi(b_2)$$

et ϕ est bien affine.

II.4) Soit b et b' tels que $\phi(b) = \phi(b')$, alors $u_b - u_{b'}$ est solution de (1) avec les conditions (4) et $f = 0$. Donc puisque $f \geq 0$ on a $u_b - u_{b'} \geq 0$ (question 2.1 et puisque $-f \geq 0$ on a aussi $-(u_b - u_{b'}) \geq 0$. Finalement $u_b - u_{b'} = 0$ et $u_b = u_{b'}$ donc $b = b'$ (dériver en 0.)

II.5) Puisque ϕ est injective et affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ϕ est bijective, il existe un unique b_0 tel que $\phi(b_0) = 0$, c'est-à-dire tel que u_{b_0} soit solution de (1) avec les conditions (4).

Partie III

III.1) Soit $i_0 \in [1, n - 1]$ tel que $u_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n-1} u_i$. Si $u_{i_0} \leq 0$ on a aussi $u_{i_0} = \min_{0 \leq i \leq n} u_i$ car $u_0 = u_n = 0$. Donc $u_{i_0-1} + u_{i_0+1} - 2u_{i_0} \geq 0$, or $f_{i_0} \geq 0$ donc

$$V_{i_0}u_{i_0} = f_{i_0} + \frac{u_{i_0-1} + u_{i_0+1} - 2u_{i_0}}{(\Delta x)^2} \geq 0$$

or $V_{i_0} > 0$ donc $u_{i_0} \geq 0$. Finalement $u_{i_0} \leq 0 \Rightarrow u_{i_0} \geq 0$, donc $u_{i_0} \geq 0$.

III.2) On calque la démonstration de la partie II. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \bar{u} &\mapsto (V_i u_i - \frac{u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i}{(\Delta x)^2}) \end{aligned}$$

Elle est linéaire et la question précédente montre que son noyau est réduit à $\{0\}$ (raisonner comme en 2.4), c'est un isomorphisme car l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. En particulier elle est bijective et le système (6) possède une unique solution.

III.3) On a

$$\epsilon_i = \frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i v_i = \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i u_i - \frac{-u((i-1)\Delta x) + 2u(i\Delta x) - u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2} - V_i u(i\Delta x)$$

donc

$$\epsilon_i = f_i - V_i u(i\Delta x) - \frac{-u((i-1)\Delta x) + 2u(i\Delta x) - u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Or $f_i = f(i\Delta x)$ et $V_i = V(i\Delta x)$ et u est solution de (5) donc $f_i - V_i u(i\Delta x) = -u''(i\Delta x)$.

Pour obtenir ensuite l'inégalité demandée on utilise la formule de Taylor à l'ordre 4 en $i\Delta x$, avec majoration de Taylor-Lagrange du reste sur $[(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x]$. Notons $M_{4,i} = \sup_{[(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x]} |u^{(4)}(x)|$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} u((i+1)\Delta x) &= u(i\Delta x) + (\Delta x)u'(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}u''(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^3}{6}u'''(i\Delta x) + \eta^+ \\ u((i-1)\Delta x) &= u(i\Delta x) - (\Delta x)u'(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}u''(i\Delta x) - \frac{(\Delta x)^3}{6}u'''(i\Delta x) + \eta^- \end{aligned}$$

avec

$$|\eta^+| \leq \frac{(\Delta x)^4}{24} M_{4,i} \quad |\eta^-| \leq \frac{(\Delta x)^4}{24} M_{4,i}.$$

En sommant ces deux égalités

$$\frac{-u((i-1)\Delta x) + 2u(i\Delta x) - u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2} = -u''(i\Delta x) - \frac{\eta^+ + \eta^-}{(\Delta x)^2}$$

et

$$|\epsilon_i| = \left| \frac{\eta^+ + \eta^-}{(\Delta x)^2} \right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12} M_{4,i}$$

III.4)

$$-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1} = -v_{i+1} + 2v_i - v_{i-1} - \frac{E}{2n^2} \underbrace{(-(i-1)(n-(i-1)) + 2i(n-i) - (i+1)(n-(i+1)))}_{=2!}$$

De plus $\Delta x = \frac{1}{n}$ donc

$$\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{(\Delta x)^2} + V_i w_i = \epsilon_i - \frac{V_i E}{2} \frac{i(n-i)}{n^2} - E = \tilde{f}_i$$

avec $\tilde{f}_i \leq \epsilon_i - E \leq 0$. Donc, d'après 3.1, pour tout i $w_i \leq 0$.

III.5) Pour la même raison, en remplaçant E par $-E$ nous aurons $z_i \geq 0$ pour tout i .

III.6) Il résulte des deux inégalités précédentes que $\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad |v_i| \leq \frac{E}{2} \frac{i(n-i)}{n^2}$.

Or, pour tout t de $[0, n]$, $t(n-t) \leq \frac{n^2}{4}$ et $E \leq \frac{1}{12} (\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|) (\Delta x)^2$

Par conséquent

$$\forall i \quad |u_i - u(i\Delta x)| = |v_i| \leq \frac{1}{96} \left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| (= M_4) \right) (\Delta x)^2$$

Soit $x \in [0, 1]$, pour tout n il existe i_n tel que $\frac{i_n}{n} \leq x \leq \frac{i_n+1}{n}$ c'est-à-dire $i_n \Delta x \leq x \leq (i_n+1)\Delta x$.

On a donc $\lim i_n \Delta x = x$ et aussi $\lim u(i_n \Delta x) = u(x)$ puisque u est continue. Mais pour tout n $|u_{i_n} - u(i_n \Delta x)| \leq \frac{1}{96} M_4 (\Delta x)^2$, donc $\lim u_{i_n} = u(x)$ et la convergence est assez rapide (en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$).

III.7) Puisque $V_i u(i\Delta x) - f_i - u''(i\Delta x) = 0$ on obtient $l_i - u''(i\Delta x) = V_i(u_i - u(i\Delta x))$ donc

$$|l_i - u''(i\Delta x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |V(x)| |u_i - u(i\Delta x)|$$

on peut prendre $A = \frac{1}{96} \sup_{x \in [0,1]} |V(x)|$.

III.8) l est la fonction affine par morceaux qui vaut l_i en $i\Delta x$ et est affine sur $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$. Si x est dans $[0, 1]$ il existe un unique i tel que i soit dans $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$.

$$\begin{aligned} l(x) - u''(x) &= l_i + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(l_{i+1} - l_i) - u''(x) \\ &= \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x}l_i + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}l_{i+1} - u''(x) \\ &= \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x}(l_i - u''(i\Delta x)) + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(l_{i+1} - u''((i+1)\Delta x)) + \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x}(u''(i\Delta x) - u''((i+1)\Delta x)) \end{aligned}$$

On écrit alors la formule de Taylor à l'ordre 2 en x pour u''

$$u''(i\Delta x) = u''(x) + (i\Delta x - x)u'''(x) + \frac{(i\Delta x - x)^2}{2}\eta_i^-$$

avec $|\eta_i^-| \leq M_4$.

De même pour $u''((i+1)\Delta x)$, avec η_i^+ .

On reporte dans la dernière inégalité. Les termes en $u''(x)$ et $u'''(x)$ disparaissent.

Puisque

$$0 \leq \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{x - i\Delta x}{\Delta x} \leq 1$$

l'inégalité triangulaire donne

$$|l(x) - u''(x)| \leq |l_i - u''(i\Delta x)| + |l_{i+1} - u''((i+1)\Delta x)| + \frac{|\eta_i^+| + |\eta_i^-|}{2}(\Delta x)^2$$

On peut prendre $B = 2A + 1$.

III.9) u'' est continue donc $\int_0^y u''(t) dt = u'(y) - u'(0)$, une nouvelle intégration donne

$$\int_0^1 \left(\int_0^y u''(t) dt \right) dy = u(1) - u(0) - u'(0) = -u'(0)$$

Soit $M = -\int_0^1 \left(\int_0^y l(t) dt \right) dy$

$$|M - u'(0)| \leq \int_0^1 \left(\int_0^y |l(t) - u''(t)| dt \right) dy \leq \frac{1}{2}M_4(\Delta x)^2$$

Il reste à vérifier que M est une combinaison linéaire des l_i . Pour cela on commence par intégrer par parties :

$$M = [-(x-1) \int_0^y l(t) dt] + \int_0^1 (y-1)l(y) dy = + \int_0^1 (y-1)l(y) dy$$

On utilise ensuite la relation de Chasles

$$M = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} (y-1)l(y) dy$$

Or sur chaque $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$

$$l(y) = \frac{(i+1)\Delta x - y}{\Delta x}l_i + \frac{y - i\Delta x}{\Delta x}l_{i+1}$$

donc

$$\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} (y-1)l(y) dy = A_i l_i + B_i l_{i+1}$$

Avec un peu plus de courage on pourrait exprimer A_i et B_i . Il m'a manqué !

IV

IV.1)

- Si $\psi(\lambda) = 0$ alors u_λ est solution du système (7).
- Réciproquement si le système (7) possède une solution non nulle v alors $v'(0) \neq 0$ (Sinon, d'après le théorème de Cauchy v serait la solution nulle car celle-ci est solution du même problème de Cauchy). Soit $v_1 = \frac{1}{v'(0)}v$ alors v_1 est solution de (7) et $v_1'(0) = 1$ donc $v_1 = u_\lambda$ et $\psi(\lambda) = v_1(1) = 0$.

IV.2) On multiplie chaque membre de (7) par $u(x)$ et on intègre entre 0 et 1.

$$\int_0^1 -u''(x)u(x) dx + \int_0^1 V(x)u^2(x) dx = \lambda \int_0^1 u^2(x) dx$$

La transformation de la première intégrale à l'aide d'une intégration par parties conduit, puisque $u(0) = u(1) = 0$, à :

$$\int_0^1 (u'^2(x) + V(x)u^2(x)) dx = \lambda \int_0^1 u^2(x) dx$$

IV.3) Si $\lambda \leq V_0$ alors $\theta = u'^2 + (V - \lambda)u^2$ est continue et positive. D'après la question précédente l'intégrale est nulle, elle est donc nulle. En particulier u' est nulle or $u(0) = 0$ donc $u = 0$.

En résumé si $\lambda \leq V_0$ la seule solution de (7) est la fonction nulle.

IV.4) On suppose $\lambda > V_0$, on pose $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$, l'équation différentielle peut s'écrire

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = V(x)u(x)$$

En particulier u_λ est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = V(x)u_\lambda(x)$$

La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation précédente est

$$y(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre en utilisant la méthode de la variation des constantes. On se ramène classiquement à

$$\begin{cases} A'(x) \cos(\alpha x) + B'(x) \sin(\alpha x) &= 0 \\ -\alpha A'(x) \sin(\alpha x) + \alpha B'(x) \cos(\alpha x) &= V(x)u_\lambda(x) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$A'(x) = -\frac{V(x)u_\lambda(x) \sin(\alpha x)}{\alpha} \quad B'(x) = \frac{V(x)u_\lambda(x) \cos(\alpha x)}{\alpha}$$

Les conditions $u_\lambda(0) = 0$ et $u'_\lambda(0) = 1$ donnent $A(0) = 0$ et $B(0) = \frac{1}{\alpha}$.

On en déduit

$$A(x) = -\int_0^x \frac{V(t)u_\lambda(t) \sin(\alpha t)}{\alpha} dt \quad B(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \frac{V(t)u_\lambda(t) \cos(\alpha t)}{\alpha} dt$$

et finalement

$$u_\lambda(x) = A(x) \cos(\alpha x) + B(x) \sin(\alpha x) = \sin(\alpha x) \alpha + \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} V(s)u_\lambda(s) ds$$

IV.5) On écrit $u_\lambda(x) = \frac{h_\lambda(x)}{\alpha} + \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$ et on injecte dans l'équation intégrale précédente. On obtient le résultat demandé.

IV.6) En utilisant $\left| \int_a^b \tau(s) ds \right| \leq (b-a) \sup_{s \in [a,b]} |\tau(s)|$ on obtient directement :

$$\forall x \in [0, 1] \quad |h_\lambda(x)| \leq \frac{x}{\alpha} \max_{x \in [0,1]} |V(x)| |h_\lambda(x)| + \frac{x}{\alpha} \max_{x \in [0,1]} |V(x)| \leq \frac{1}{\alpha} (\|V\| \|h_\lambda\| + \|V\|)$$

où $\|g\| = \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$.

Par conséquent, pour $\lambda \geq (2\|V\|)^2$ on a $\frac{\|V\|}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ et $\|h_\lambda\| \leq \frac{\|h_\lambda\|}{2} + \frac{\|V\|}{\alpha}$ soit $\|h_\lambda\| \leq 2 \frac{\|V\|}{\alpha}$

IV.7) On peut donc écrire

$$u_\lambda(1) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

lorsque α tend vers $+\infty$.

En particulier :

$$\psi\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right) = u_{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2}(1) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

est strictement positif pour k assez grand.

IV.8) Pour la même raison

$$\psi\left(\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right) = u_{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2}(1) = -\frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

est strictement négatif pour k assez grand.

IV.9) On utilise la représentation intégrale (8).

$$(*) \quad g_{\lambda,\mu}(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}} + \int_0^x \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-s)}{\sqrt{\lambda}} u_{\lambda}(s) - \frac{\sin \sqrt{\mu}(x-s)}{\sqrt{\mu}} u_{\mu}(s) \right) V(s) ds$$

Considérons $\gamma_x(t) = \frac{\sin \sqrt{t}x}{\sqrt{t}}$, g_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]V_0, +\infty[$ et $\gamma'_x(t) = \frac{x \cos \sqrt{t}x}{2t} - \frac{\sin \sqrt{t}x}{2t\sqrt{t}}$ donc $|\gamma'_x(t)| \leq \frac{1}{V_0} + \frac{1}{2V_0\sqrt{V_0}} = c_1$. De l'inégalité des accroissements finis on tire

$$|\gamma_x(\lambda) - \gamma_x(\mu)| \leq c_1|\lambda - \mu|$$

(c_1 est indépendant de x).

De plus on peut écrire

$$\gamma_{x-s}(\lambda)u_{\lambda}(s) - \gamma_{x-s}(\mu)u_{\mu}(s) = (\gamma_{x-s}(\lambda) - \gamma_{x-s}(\mu))u_{\lambda}(s) + \gamma_{x-s}(\mu)(u_{\lambda}(s) - u_{\mu}(s))$$

Or $|\gamma_{x-s}(\mu)| \leq \frac{1}{V_0}$ et u_{λ} est bornée, a priori par un nombre dépendant de λ . Mais si dans la méthode qui va suivre on remplace $|g_{\lambda,\mu}|$ par $|u_{\lambda}|$, alors en utilisant l'inégalité

$$|u_{\lambda}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{V_0}} + \int_0^x \frac{\|V\|}{\sqrt{V_0}} |u_{\lambda}(s)| ds$$

on obtiendrait une majoration indépendante de λ .

Finalement, en majorant dans (*)

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \leq c_1|\lambda - \mu| + \int_0^x \|V\| |u_{\lambda}| c_1|\lambda - \mu| + \frac{\|V\|}{V_0} |g_{\lambda,\mu}(s)| ds$$

et, puisque x est dans $[0, 1]$:

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \leq c_1(1 + \|V\| |u_{\lambda}|) + \frac{\|V\|}{V_0} \int_0^x |g_{\lambda,\mu}(s)| ds$$

Avec les notation de l'énoncé, et pour des constantes c_2 et c_3 naturelles :

$$\begin{aligned} I'_{\lambda,\mu}(x) &\leq c_2|\lambda - \mu| + c_3 I_{\lambda,\mu}(x) \\ I'_{\lambda,\mu}(x) - c_3 I_{\lambda,\mu}(x) &\leq c_2|\lambda - \mu| \\ e^{-c_3x} (I'_{\lambda,\mu}(x) - c_3 I_{\lambda,\mu}(x)) &\leq c_2|\lambda - \mu| e^{-c_3x} \\ \frac{d}{dx} (e^{-c_3x} I_{\lambda,\mu}(x)) &\leq c_2|\lambda - \mu| e^{-c_3x} \\ e^{-c_3x} I_{\lambda,\mu}(x) &\leq \frac{c_2}{c_3} |\lambda - \mu| (1 - e^{-c_3x}) \\ I_{\lambda,\mu}(x) &\leq \frac{c_2}{c_3} |\lambda - \mu| (e^{c_3x} - 1) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser cette inégalité dans l'inégalité vérifiée par $g_{\lambda,\mu}$ pour obtenir.

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \leq c_2|\lambda - \mu| + c_2|\lambda - \mu|(e^{c_3x} - 1) = c_2|\lambda - \mu|e^{c_3x} \leq c_2e^{c_3}|\lambda - \mu|$$

IV.10) On vient de voir à la question précédente que (en prenant $x = 1$)

$$|u_{\lambda}(1) - u_{\mu}(1)| \leq c_2|\lambda - \mu|e^{c_3} = c_4|\lambda - \mu|$$

(remarquons que c_4 dépend de λ). En faisant tendre μ vers λ on obtient

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \psi(\mu) = \psi(\lambda)$$

λ étant quelconque on a bien établi la continuité de ψ sur $]V_0, +\infty[$.

IV.11) Considérons les k_0 et k_1 des questions 4.7 et 4.8 alors pour tout n entier $\psi[(\frac{\pi}{2} + (k_0 + k_1 + n)(2\pi))^2] > 0$ et $\psi[(\frac{3\pi}{2} + (k_0 + k_1 + n)(2\pi))^2] < 0$ et ψ est continue, donc il existe λ_n dans $[(\frac{\pi}{2} + (k_0 + k_1 + n)(2\pi))^2, (\frac{3\pi}{2} + (k_0 + k_1 + n)(2\pi))^2]$ tel que $\psi(\lambda_n) = 0$. D'après la question 4.1 u_{λ_n} est une solution non nulle du système (7).

Il est clair que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.