

Concours Communs Polytechniques

PSI

Mathématiques 2 ; session 2004

Partie I

1. Pour p et q entiers, $a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1) a_{p+1,q}$
 - 1.1. Pour tout q de $\mathbb{N}$, $a_{1,q+1} = a_{0,q} + a_{1,q}$. Donc $a_{1,1} = a_{0,0} + a_{1,0} = 1$ et pour $q > 0$,
 $a_{1,q+1} = a_{1,q}$. Pour tout q de $\mathbb{N}^*$, $a_{1,q} = 1$.
 - 1.2. $a_{2,1} = a_{1,0} + 2a_{2,0} = 0$; $a_{2,2} = a_{1,1} + 2a_{2,1} = 1$.
 - 1.3. Pour $q > 1$, $a_{2,q} = a_{1,q-1} + 2a_{2,q-1} = 1 + 2a_{2,q-1}$. D'où $a_{2,3} = 1 + 2 \times 1 = 2$;
 $a_{2,4} = 1 + 2 \times 3 = 7$; $a_{2,5} = 1 + 2 \times 7 = 15$. On montre par récurrence que
 $a_{2,q} = 2^{q-1} - 1$.
 - 1.4. La propriété P_0 est vraie car pour tout q de $\mathbb{N}$, $a_{0,q} = 1$ ou $0 \in \mathbb{Y}$.
Supposons la propriété vraie pour un entier p donné : comme $a_{p+1,0} \in \mathbb{Y}$,
la relation de définition permet de montrer, par récurrence sur q , que
tous les éléments $a_{p+1,q}$ sont dans $\mathbb{N}$. P_{p+1} est vraie.
 - 1.5. Montrons par récurrence sur q la propriété $R_q : \forall p \in \mathbb{Y}, p > q \Rightarrow a_{p,q} = 0$.
La propriété R_0 est vraie car, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $a_{p,0} = 0$.
Supposons R_q vraie : $\forall p \in \mathbb{Y}, p > q+1 \Rightarrow a_{p,q+1} = a_{p-1,q} + p a_{p,q}$ avec $p-1 > q$
donc $\forall p \in \mathbb{Y}, p > q+1 \Rightarrow a_{p,q+1} = 0$. R_{q+1} est vraie.
 - 1.6. On obtient alors facilement, pour tout p $a_{p,p} = 1$.

Par calcul direct ou en utilisant une procédure Maple

```
> A:=proc(n)
local Z,p,q,k;
Z:=matrix(n+1,n+1);
Z[1,1]:=1;
for k from 2 to n+1 do Z[k,1]:=0; Z[1,k]:=0; od;
for p from 1 to n do for q from 1 to n do Z[p+1,q+1]:=Z[p,q]+
(p)*Z[p+1,q];od;od;
print(Z); end;
```

$$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie II

1. $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$

1.1. $\det(M)$ est une somme de produits de coefficients de M , donc d'entiers.

$$\det(M) \in \mathbb{C}.$$

1.2. Les coefficients de $\text{com}(M)$ sont des déterminants d'ordre n extraits de M . Ce sont tous des entiers.

1.3. Si $\det(M) = \pm 1$, M est inversible en tant que matrice de $M_{n+1}(\mathbb{C})$ et son

$$\text{inverse est } M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t(\text{com}(M)) = \pm {}^t(\text{com}(M)) \in M_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Réciproquement si M est inversible dans $M_{n+1}(\mathbb{C})$, il existe une matrice Q de $M_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $MQ = QM = I_{n+1}$. Et donc : $\det(M) \times \det(Q) = 1$.

Or ces deux déterminants sont des entiers inversibles dans $\mathbb{C}$.

On a donc $\det(M) = \pm 1$.

2. $B_0 = 1$; pour $p > 0$, $B_p = \prod_{j=0}^{p-1} (X - j)$

2.1. Pour tout p de $\mathbb{N}$, $\partial^0(B_p) = p$. Pour n entier de $\mathbb{N}$, la famille $(B_0, \dots, B_n)$ est une famille de polynômes étagés en degré. Elle est libre. On obtient une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ qui est de dimension $n+1$.

C'est une base de cet espace.

2.2. On obtient par calcul : $B_0 = 1, B_1 = X, B_2 = X^2 - X, B_3 = X^3 - 3X^2 + 2X,$

$$B_4 = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X.$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; Q_4 = P_4^{-1}$$

La résolution du système triangulaire $P_4 X = B$ donne aisément la

$$\text{matrice inverse et on a } Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(4)$$

2.3. Pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, $B_k \in \mathbb{C}_k[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$. La matrice de passage de (H) à (B) est donc triangulaire supérieure. Comme un produit de polynômes à coefficients entiers est un polynôme à

coefficients entiers, pour tout $k > 0$, $B_k = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ est à coefficients entiers.

2.4. Pour tout entier k B_k est un polynôme de degré k de coefficient dominant 1.

Les éléments diagonaux de la matrice P_n sont tous égaux à 1 et, comme cette matrice est triangulaire supérieure, $\det(P_n) = 1$.

2.5. Pour tout k , $\text{Vect}(B_0, \dots, B_k) = \text{Vect}(1, \dots, X^k)$ et le vecteur X^k s'exprime donc comme combinaison linéaire des B_j , $0 \leq j \leq k$. La matrice de passage de (B) à (H) est également triangulaire supérieure. C'est l'inverse de la matrice P_n , matrice à coefficients entiers de déterminant 1. D'après la question 1.3 cette matrice est aussi élément de $M_{n+1}(\mathbb{C})$.

$$2.6. X^q = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p.$$

En particulier $X^0 = 1 = \beta_{0,0} B_0 = \beta_{0,0}$ et pour $q > 0$, en évaluant la relation

$$\text{en } 0, 1 \text{ et } 2 \text{ on a : } 0 = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p(1) = \beta_{0,q} \times 1 + 0 = \beta_{0,q};$$

$$1^q = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p(1) = \beta_{0,q} + \beta_{1,q} \times 1 \text{ et donc } \beta_{1,q} = 1 \text{ pour } q > 0. \text{ De même}$$

$$2^q = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p(2) = \beta_{0,q} + \beta_{1,q} \times 2 + \beta_{2,q} \times 2 \text{ et pour } q > 1, \beta_{2,q} = \frac{2^q - 2}{2} = 2^{q-1} - 1.$$

2.7. Comme la matrice Q_n est triangulaire supérieure, pour tout entiers p et q , $p > q \Rightarrow \beta_{p,q} = 0$.

Mais pour tout entier q ,

$$X^{q+1} = X \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p = \sum_{p=0}^{q+1} \beta_{p,q+1} B_p = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} (X - p + p) B_p$$

$$\text{soit } X^{q+1} = \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_{p+1} + p \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p = \sum_{p=1}^{q+1} \beta_{p-1,q} B_p + p \sum_{p=0}^q \beta_{p,q} B_p$$

Par suite, par unicité de la décomposition dans la base (B) on a, pour tout entier strictement positif p , $p \leq q+1$, $\beta_{p,q+1} = \beta_{p-1,q} + p\beta_{p,q}$.

Comme $p > q \Rightarrow \beta_{p,q} = 0$, les coefficients $\beta_{p,q}$ vérifient les conditions de définition des coefficients $a_{p,q}$. D'où, pour tout n de $\mathbb{N}$, $Q_n = A_n$.

Partie III

$$F = C^\infty([0, +\infty[; \mathbb{R}) ; \Phi(f) = g \Leftrightarrow \forall x > 0, g(x) = x f'(x).$$

1. On montre facilement que Φ est un endomorphisme de E .

Pour g élément quelconque de F , soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt$

.

Comme $t \mapsto \frac{g(t)}{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, f , primitive de cette fonction sur

l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ est aussi de classe C^∞ . De plus : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x}$. Donc

$$\Phi(f) = g.$$

L'application Φ est surjective.

$$\Phi(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ constante sur }]0, +\infty[.$$

$\text{Ker}\Phi$ est l'espace vectoriel de dimension 1 constitué des fonctions constantes sur $]0, +\infty[$.

Φ n'est pas injective.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Phi(f) = \alpha f$ si et seulement si f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $xy' = \alpha y$. La solution générale de cette équation est

$$y(x) = ce^{\int \alpha \frac{dx}{x}} = cx^\alpha.$$

L'ensemble des valeurs propres de Φ est $\mathbb{R}$. Pour chaque valeur propre α , l'espace propre associé est la droite vectorielle dirigée par la fonction de F $x \mapsto x^\alpha$.

3. Avec les notations précédentes, si $h = \Phi^2(f) = \Phi(g)$, pour tout x strictement positif, $h(x) = xg'(x) = x(f'(x) + xf''(x)) = x^2 f''(x) + xf'(x)$.

$$f \in \text{Ker}\Phi^2 \Leftrightarrow g \in \text{Ker}\Phi \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} / \forall x > 0, xf'(x) = c$$

$$f \in \text{Ker}\Phi^2 \Leftrightarrow \exists (c, d) \in \mathbb{R}^2 / \forall x > 0, f(x) = c \ln x + d$$

$\text{Ker}\Phi^2$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension 2 engendré par les deux fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 1$.

4. Pour $q=1$, f élément quelconque de F , $x > 0$, $\Phi(f)(x) = xf'(x) = 1 \times x^1 f^{(1)}(x)$

La relation demandée est vraie avec $d_{1,1} = 1$.

Supposons la propriété vraie pour q quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } \forall f \in F, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Phi^{q+1}(f)(x) = \Phi[\Phi^q(f)](x) = x \frac{d}{dx} \left[\sum_{p=1}^q d_{p,q} x^p f^{(p)}(x) \right]$$

$$\Phi^{q+1}(f)(x) = x \sum_{p=1}^q p d_{p,q} x^{p-1} f^{(p)}(x) + x \sum_{p=1}^q d_{p,q} x^p f^{(p+1)}(x)$$

$$\Phi^{q+1}(f)(x) = \sum_{p=1}^q p d_{p,q} x^p f^{(p)}(x) + \sum_{p=1}^q d_{p,q} x^{p+1} f^{(p+1)}(x) = \sum_{p=1}^q p d_{p,q} x^p f^{(p)}(x) + \sum_{p=2}^{q+1} d_{p-1,q} x^p f^{(p)}(x)$$

$$\Phi^{q+1}(f)(x) = d_{1,q} x f'(x) + \sum_{p=2}^q (p d_{p,q} + d_{p-1,q}) x^p f^{(p)}(x) + d_{q,q} x^{q+1} f^{(q+1)}(x)$$

La relation est vraie au rang $q+1$ avec, pour tout p de $\{2, q\}$,

$$d_{p,q+1} = p d_{p,q} + d_{p-1,q}, \quad d_{1,q+1} = d_{1,q}, \quad d_{q+1,q+1} = d_{q,q}.$$

5. Avec les conventions proposées, les $d_{p,q}$ vérifient les mêmes conditions de définition que les $a_{p,q}$.

Partie IV

1. $\phi(t) = \exp(e^t - 1)$

$$1.1. e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + o(X^4)$$

Par composition :

$$\varphi(t) = 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right) + \frac{1}{2} \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{24} t^4 + o(t^4)$$

$$\varphi(t) = 1 + t + t^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + t^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + t^4 \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{1}{24}\right) + o(t^4)$$

$$\varphi(t) = 1 + t + t^2 + \frac{5}{6} t^3 + \frac{5}{8} t^4 + o(t^4).$$

1.2. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Son développement limité en 0 est

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + \frac{t^3}{6}\varphi^{(3)}(0) + \frac{t^4}{24}\varphi^{(4)}(0) + o(t^4)$$

Par unicité du développement limité on a :

$$\varphi'(0) = 1, \varphi''(0) = 2, \varphi^{(3)}(0) = 5, \varphi^{(4)}(0) = 15.$$

2. P_n^j est le nombre de partitions d'un ensemble E de cardinal n en j classes.

2.1. Comme chaque classe comporte au moins un élément, si j est le nombre de classes $j \leq n$. Donc si $j > n$ on ne peut construire de partition de E comportant j classes et $P_n^j = 0$.

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une seule partition comportant une classe : la seule classe est E. D'où $P_n^1 = 1$. De même la seule partition comportant n classes est celle où les classes sont constituées de tous les sous-ensembles à un élément de E. $P_n^n = 1$.

2.3. $j \geq 2, n \geq 1$

Soit a un élément fixé de E.

Les partitions de E à j classes sont de deux sortes :

ou bien $\{a\}$ est une classe de cette partition et les autres classes

forment une partition à j-1 classes de $E \setminus \{a\}$, ensemble de cardinal n-1.

Il y en a P_{n-1}^{j-1} de ce type.

ou bien la classe qui contient a n'est pas réduite à $\{a\}$ l'intersection des j classes avec $E \setminus \{a\}$ donne une partition de $E \setminus \{a\}$ en j classes. Une partition de $E \setminus \{a\}$ en j classes étant donnée on peut « remonter » à une partition de E en j classes en conservant j-1 classes et en ajoutant l'élément a à l'une des j classes de la partition. Il y a donc au total $j \times P_{n-1}^j$ manières de procéder.

Par suite : $P_n^j = P_{n-1}^{j-1} + jP_{n-1}^j$.

2.4. Les relations de définition de ces entiers sont les mêmes que dans la partie I.

3. P_n est le nombre de partitions de E.

3.1. Si $E = \{a\}$, la seule partition de E est celle composée d'une classe $\{a\}$.

$$P_1 = 1$$

Si $E = \{a, b\}$ 2 partitions, $(\{a, b\})$ et $(\{a\}, \{b\})$. $P_2 = 2$

Si $E = \{a, b, c\}$, $P_3 = P_3^1 + P_3^2 + P_3^3 = 2 + P_3^2$

Mais d'après 2.3, $P_3^2 = P_2^1 + 2P_2^2 = 3$ et $P_3 = 5$

Enfin $P_4 = P_4^1 + P_4^2 + P_4^3 + P_4^4 = 2 + P_4^2 + P_4^3$ avec $P_4^2 = P_3^1 + 2P_3^2 = 1 + 6 = 7$ et

$$P_4^3 = P_3^2 + 3P_3^3 = 3 + 3 = 6 ; P_4 = 2 + 7 + 6 = 15$$

$$3.2. P_n = \sum_{j=1}^n P_n^j$$

3.3. Les P_n sont des entiers positifs. Montrons par récurrence que $P_n \leq n!$.

$P_1 = 1 \leq 1$. Supposons que, pour n donné, pour tout k, $0 \leq k \leq n$, $P_k \leq k!$.

$$\text{On a alors } P_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k P_k \leq \sum_{k=0}^n C_n^k k! = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = n! \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{(0)!} \right)$$

et $P_{n+1} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$. La propriété est vraie au rang n+1.

$$4. s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n.$$

4.1. Pour $x \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{P_n}{n!} x^n \leq x^n$. Comme $\sum x^n$ est convergente, par

comparaison de séries de termes positifs, $\sum \frac{P_n}{n!} x^n$ est convergente.

Le rayon de convergence de cette série entière est donc supérieur ou égal à 1.

$$4.2. \text{ Si } x \in]-1, 1[, s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{P_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_{n+1}}{n!} x^n$$

$$\text{En utilisant (1), } s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^n C_n^k P_k \right)}{n!} x^n$$

La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $]-1, 1[$, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes donne :

$$s(x) \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec, pour tout n de } \mathbb{N},$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k P_k}{n!}.$$

On a donc : $\forall x \in]-1, 1[, s'(x) = e^x s(x)$.

4.3. La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = e^x y$ est

$$y(x) = k e^{\int e^x dx} = k \exp(e^x), k \text{ réel.}$$

En particulier il existe un réel k tel que, pour tout x de $]-1, 1[$,

$$s(x) = k \exp(e^x)$$

Comme $s(0) = P_0 = 1$ et donc $1 = k \exp(1)$; $k = e^{-1}$.

$$\text{Par suite } s(x) = \exp(e^x - 1) = \varphi(x)$$

4.4. Le développement en série entière est unique $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $s^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0) = P_n$.