

A. Questions préliminaires

1. - Par hypothèse f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1), et pour tout $t \in \mathbb{R}$, le module de la fonction : $x \rightarrow e^{itx}f(x)$ est f ,
par suite la fonction : $x \rightarrow e^{itx}f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $\Phi_f(t)$ et donc de la fonction Φ_f .
- Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, x) dx$, où l'on a posé $h(t, x) = e^{itx}f(x)$.

La fonction h est continue comme, produit de fonctions continues, de plus pour tout k entier naturel, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe en tout point $(x, t) \in \mathbb{R}^2$

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (ix)^k h(t, x)$ et cette dernière fonction est continue comme produit de fonctions continues et elle vérifie :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| = |x|^k f(x)$$

de plus par hypothèse la fonction $x \rightarrow |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On conclut alors par le théorème de dérivabilité sous signe intégrale que la fonction Φ_f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} f(x) dx.$$

En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_f^{(k)}(0) = i^k \cdot a_k(f).$$

2. Soit x un réel et $n \geq 1$. Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(t) = e^{it}$. Cette fonction étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à cette fonction à l'ordre $n-1$ entre 0 et x , on a :

$$\left| h(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x^m}{m!} h^{(m)}(0) \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in J} |h^{(n)}(t)|$$

où J est le segment d'extrémités 0 et x . Mais pour tout m , $h^{(m)}(0) = i^m$ et tout $t \in J$, $|h^{(n)}(t)| = |i^n e^{it}| = 1$, d'où l'inégalité demandée.

3. Comme, la fonction $t \rightarrow e^{-ita} - e^{-itb}$ est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 est $i(b-a)$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{t} = i(b-a),$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} h_{a,b}(t) = b-a$ et par suite la fonction $h_{a,b}$ est continue en 0. D'autre part cette fonction est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ car elle est rapport de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Finalement cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $|h_{a,b}(t)| = \left| \int_a^b e^{-itx} dx \right| \leq \int_a^b |e^{-itx}| dx = \int_a^b 1 dx = b-a$. et cette dernière inégalité est valable pour $t = 0$. D'où pour tout t réel,

$$|h_{a,b}(t)| \leq b-a.$$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, comme $e^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$ est la somme d'une série de nombres réels positifs, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{k^n}{n!} \leq e^k$$

en particulier :

$$\frac{k^k}{k!} \leq e^k.$$

6. Soit $(\theta, T) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^+$. Puisque la fonction $t \rightarrow \frac{\sin(\theta t)}{t}$ est paier, alors $\int_{-T}^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt = 2 \int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt$, mais par le changement de variable : $x = \theta t$, on a :

$$\int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t} dt = \int_0^{\theta T} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Par suite $R(\theta, T) = 2.S(\theta T)$., et cette dernière égalité est valable pour $\theta = 0$, puisque $R(0, T) = S(0) = 0$. D'où

$$\forall (\theta, T) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad R(\theta, T) = 2.S(\theta T).$$

7. D'après la question précédente pour tout $T > 0$, on a :

$$R(x, T) - R(y, T) = 2.(S(xT) - S(yT))$$

ou encore $R(x, T) - R(y, T) = 2. \left(\int_0^{xT} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^{yT} \frac{\sin t}{t} dt \right)$ pour tout $T > 0$, soit :

$$\forall T > 0, \quad R(x, T) - R(y, T) = 2. \int_{yT}^{xT} \frac{\sin t}{t} dt$$

et compte tenue de la formule : $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ et de la parité de la fonction qui est sous l'intégrale, on peut écrire :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (R(x, T) - R(y, T)) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi, & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ 2 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\pi, & \text{si } y = 0 \text{ et } x < 0 \\ -\pi, & \text{si } y > 0 \text{ et } x = 0 \\ \pi, & \text{si } y < 0 \text{ et } x = 0 \\ 4(\frac{\pi}{2}) = 2\pi, & \text{si } y < 0 \text{ et } x > 0 \\ -2\pi, & \text{si } y > 0 \text{ et } x < 0 \\ 0 & \text{si } xy > 0 \end{cases}$$

8. Soit $T > 0$. Alors d'une part, $\forall t \in [-T, T]$, la fonction $x \rightarrow h_{a,b}(t) \cdot e^{itx} \cdot f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par intégrabilité de la fonction f , d'autre part, la fonction

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |h_{a,b}(t) \cdot e^{itx} \cdot f(x)| dx = |h_{a,b}(t)| \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = |h_{a,b}(t)|$$

est intégrable sur $[-T, T]$, car continue sur ce segment, par suite on peut permuter les intégrales et écrire :

$$\int_{-T}^T \left(\int_{\mathbb{R}} h_{a,b}(t) e^{itx} f(x) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T h_{a,b}(t) e^{itx} f(x) dt \right) dx$$

. ou encore $\int_{-T}^T h_{a,b}(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T h_{a,b}(t) e^{itx} dt \right) \cdot f(x) dx$. D'où

$$\int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T h_{a,b}(t) e^{itx} dt \right) \cdot f(x) dx$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-T}^T h_{a,b}(t) e^{itx} dt = \int_{-T}^T \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = \int_{-T}^T \frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} dt + \int_{-T}^T \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t} dt$$

et $\int_{-T}^T \frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} dt = 0$ car la fonction sous l'intégrale est impair, par suite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-T}^T h_{a,b}(t) e^{itx} dt = \int_{-T}^T \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t} dt.$$

Mais $\int_{-T}^T \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t} dt = R(x-a, T) - R(x-b, T)$. Finalement

$$\int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T) - R(x-b, T)) \cdot f(x) dx.$$

Et pour conclure, on va montrer que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T) - R(x-b, T)) \cdot f(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$.

En effet soit $(T_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs divergente vers $+\infty$ et montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T_n) - R(x-b, T_n)) \cdot f(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx.$$

Notons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_n(x) = (R(x-a, T_n) - R(x-b, T_n)) \cdot f(x) \quad \text{et} \quad f_n(x) = R(x-a, T_n) - R(x-b, T_n).$$

D'après le **7**), la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction h définie pour tout réel x , par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \\ 2\pi f(x) & \text{si } x \in]a, b[\end{cases}$$

D'autre part, d'après le **6**), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2 \cdot (S((x-a)T_n) - S((x-b)T_n))$, et comme S est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une limite finie en $+\infty$ (qui vaut $\frac{\pi}{2}$) et en $-\infty$ (car impaire), elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Et si on note $M = \sup_{T \in \mathbb{R}} |S(T)|$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq 2M$ et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |h_n(x)| \leq 2M f(x)$$

et de plus cette fonction (dominante) $x \rightarrow 2M f(x)$ est positive intégrable sur $\mathbb{R}$.

On conclut alors par le théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T_n) - R(x-b, T_n)) \cdot f(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx.$$

Donc d'après la caractérisation séquentielle des limites :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (R(x-a, T) - R(x-b, T)) \cdot f(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) dx$$

D'où $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_f(t) dt = 2\pi \int_a^b f(x) dx$ ou encore

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_f(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

9. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$.

Comme $\Phi_f = \Phi_g$, alors

$$\forall T > 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T h_{a,b}(t) \Phi_g(t) dt,$$

donc compte tenue de la question précédente et par passage à la limite ($T \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Finalement pour tout $a < b$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, donc, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Et si on note pour tout y réel, $F(y) = \int_0^y f(x) dx$ et $G(y) = \int_0^y g(x) dx$, alors par continuité des fonctions f, g sur $\mathbb{R}$, les fonctions F et G sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f, g et de plus, d'après de ce qui précède, elle sont égales, donc $F' = G'$, d'où $f = g$.

10. La fonction f_0 est positive, continue en chaque point de $\mathbb{R}^*$, d'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2} - u} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_0(x) = 0 = f_0(0)$. Ce qui justifie la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}$. D'autre part, puisque cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}^-$ il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. En effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall A > 0, \quad \int_{\varepsilon}^A f_0(x) dx = \int_{\varepsilon}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx.$$

Et si $\varepsilon > 0$, alors après le changement de variable : $u = \ln x$, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Mais d'après le résultat admis dans l'énoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

donc par passage à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = 1,$$

d'où (f_0 étant positive) f_0 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_0(x) dx = 1$. On conclue alors que la fonction f_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx = 1$. et par suite $f_0 \in E$.

11. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^A x^k \cdot f_0(x) dx = \int_{\varepsilon}^A x^k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^A x^{k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} dx \underset{u=\ln x}{=} \int_{\ln \varepsilon}^{\ln A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{(ku - \frac{u^2}{2})} du.$$

Mais d'après le résultat admis dans l'énoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{(ku - \frac{u^2}{2})} du = e^{\frac{k^2}{2}},$$

donc par passage à la limite ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ku - \frac{u^2}{2})} du = e^{\frac{k^2}{2}},$$

d'où ($x \rightarrow x^k f_0$ étant positive) $x \rightarrow x^k f_0$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^k \cdot f_0(x) dx = e^{\frac{k^2}{2}}$. Or cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}^-$, on conclue alors qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$a_k(f_0) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f_0(x) dx = e^{\frac{k^2}{2}},$$

et on remarque que cette formule est valable pour $k = 0$. finalement la fonction f_0 admet des moments de tous ordres et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k(f_0) = e^{\frac{k^2}{2}}.$$

12. La fonction $x \rightarrow 1 + a \sin(2\pi \ln x)$ est bornée (positive) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 0$ car f_0 est continue, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) \cdot (1 + a \sin(2\pi \ln x)) = 0$, d'autre part f_a est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction continues. Finalement elle est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, comme elle est nulle sur $\mathbb{R}^-$, alors il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. En effet

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\frac{1}{n}}^n f_a(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^n f_0(x) \cdot (1 + a \sin(2\pi \ln x)) dx = \int_{\frac{1}{n}}^n f_0(x) dx + a \cdot \int_{\frac{1}{n}}^n f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \ln x$ (qui est légitime) :

$$a \cdot \int_{\frac{1}{n}}^n f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sin(2\pi u) du$$

et cette dernière intégrale est nulle puisque la fonction sous l'intégrale est impaire, donc

$$\int_{\frac{1}{n}}^n f_a(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^n f_0(x) dx.$$

Or $\int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} f_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x) dx$, par suite f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f_a(x) dx = 1$. D'où $f_a \in E$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^n x^k \cdot f_a(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^n x^k f_0(x) dx + a \cdot \int_{\frac{1}{n}}^n x^k \cdot f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \ln x$ (qui est légitime) :

$$a. \int_{\frac{1}{n}}^n x^k \cdot f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \sin(2\pi u) du.$$

Or $\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \sin(2\pi u) du = \text{Im}(\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku} e^{-\frac{1}{2}u^2} e^{2i\pi u} du)$ et d'après le résultat admis dans l'énoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(k+2i\pi)u - \frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2},$$

donc par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$a. \int_0^{+\infty} x^k \cdot f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \text{Im}(\int_{\mathbb{R}} e^{ku} e^{-\frac{1}{2}u^2} e^{2i\pi u} du) = a \text{Im}(e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2})$$

Mais $e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2} = e^{\frac{1}{2}k^2 - 2\pi^2} e^{2i\pi k} = e^{\frac{1}{2}k^2 - 2\pi^2}$ et donc sa partie imaginaire est nulle. D'où :

$$a. \int_0^{+\infty} x^k \cdot f_0(x) \sin(2\pi \ln x) dx = 0$$

et par suite $\int_0^{+\infty} x^k \cdot f_a(x) dx = \int_0^{+\infty} x^k f_0(x) dx$ et comme les deux fonctions sous l'intégrale sont nulles sur $\mathbb{R}^-$, alors

$$a_k(f_a) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f_a(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x) dx = a_k(f_0).$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $f \geq 0$, continue, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^{2k+1} f(x) = (|x|^k \sqrt{f(x)}) \cdot (|x|^{k+1} \sqrt{f(x)})$$

et ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, et l'inégalité de Cauchy Schwartz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\int_{-n}^n (|x|^k \sqrt{f(x)}) \cdot (|x|^{k+1} \sqrt{f(x)}) dx \right)^2 \leq \left(\int_{-n}^n x^{2k} f(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-n}^n x^{2k+2} f(x) dx \right).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\int_{-n}^n |x|^{2k+1} f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{-n}^n x^{2k} f(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-n}^n x^{2k+2} f(x) dx \right).$$

De plus f admet des moments de tous ordres, donc par passage à la limite dans cette dernière inégalité, on obtient le résultat demandé.

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\frac{b_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} = \frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \quad \text{car } b_{2k}(f) = a_{2k}(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k} f(x) dx.$$

Mais par hypothèse $\frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq M$ et $M > 0$, donc $\frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq 2M$, par suite $\frac{b_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq 2M$ ou encore :

$$b_{2k}(f) \leq ((2k)(2M))^{2k}.$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. et montrons que $\frac{b_{2k+1}(f)^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} \leq 2M$ ou $b_{2k+1}(f) \leq (((2k+1)(2M))^{2k+1})$.

En effet, d'après le **13**), $b_{2k+1}(f) \leq a_{2k}(f)^{\frac{1}{2}} \cdot a_{2k+2}(f)^{\frac{1}{2}}$. mais par hypothèse

$$\begin{cases} a_{2k}(f)^{\frac{1}{2}} \leq (2kM)^{2k} \\ a_{2k+2}(f)^{\frac{1}{2}} \leq ((2k+2)M)^{2k+2} \end{cases}$$

donc $b_{2k+1}(f) \leq ((2k)(M))^k \cdot ((2k+2)(M))^{k+1} = k^k (k+1)^{k+1} (2M)^{2k+1}$. Or $k^k (k+1)^{k+1} \leq (2k+1)^k \cdot (2k+1)^{k+1} = (2k+1)^{2k+1}$, d'où

$$b_{2k+1}(f) \leq (2k+1)^{2k+1} (2M)^{2k+1} = (((2k+1)(2M))^{2k+1})$$

. D'où l'inégalité demandée.

15. Soit $x, h \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Comme f admet des moments de tous ordres, alors d'après le **1**), la fonction Φ_f admet des dérivées successives à tout ordre et donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à cette fonction entre x et $x+h$ à l'ordre $n-1$,

$$\left| \Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^n \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \cdot \sup_{t \in J} \left| \Phi_f^{(n)}(t) \right|$$

où J est le segment d'extrémités x et $x + h$. Mais toujours d'après le **1)** :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n \cdot e^{itx} \cdot f(x) \cdot dx,$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_f^{(n)}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^n \cdot f(x) \cdot dx = b_n(f)$, en particulier $\sup_{t \in J} |\Phi_f^{(n)}(t)| \leq b_n(f)$ et par suite

$$\left| \Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f).$$

D'où l'inégalité demandée.

16. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons, d'après le **14)** : $\forall n \geq 1, b_n(f) \leq (2Mn)^n$, donc

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) \leq \frac{|h|^n}{n!} (2Mn)^n \quad (*).$$

D'autre part, d'après la formule de Stirling $\frac{|h|^n}{n!} (2Mn)^n \sim \frac{(2M|h|e)^n}{\sqrt{2\pi n}}$ et cette dernière suite converge vers 0 si $2M|h|e < 1$ ou $|h| < \frac{1}{2Me}$. Et compte tenue de l'inégalité (*), on a :

$$\forall h, |h| < \frac{1}{2Me}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0.$$

Or d'après la question précédente nous avons

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \quad \left| \Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f),$$

donc $\forall h, |h| < \frac{1}{2Me}, \forall n \geq 1, \left| \Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{|h|^n}{n!} \cdot b_n(f)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0$, d'où par passage à la limite ($n \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$\forall h, |h| < \frac{1}{2Me}, \quad \Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x).$$

On a donc montré que pour tout réel x et pour tout h tel que $|h| < A, \Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x)$, où on a posé $A = \frac{1}{2Me}$.

17. Procédons par récurrence et notons pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(l)$, la propriété suivante : (Si g est un élément de E et admet des moments de tous ordres et $\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = a_k(g)$. Alors

$$\forall x \in \left[-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}\right], \Phi_f(x) = \Phi_g(x)$$

- Soit g un élément de E qui admet des moments de tous ordres et verifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = a_k(g).$$

On a en particulier $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$, donc $\Phi_f(0) = \Phi_g(0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit maintenant $l \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété $\mathcal{P}(l)$ vraie et soit g un élément de E qui admet des moments de tous ordres et verifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = a_k(g).$$

Mais la fonction f vérifie la condition (U), donc la fonction g aussi (et pour le même M), donc d'après la question **16)**, il existe $A > 0$, tel que pour tout réel x et pour tout h tel que

$$|h| < A, \quad \begin{cases} \Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \\ \Phi_g(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_g^{(m)}(x) \end{cases} \quad (**).$$

Soit maintenant $y \in \left[-\frac{(l+1)A}{2}, \frac{(l+1)A}{2}\right]$, alors il existe $(x, h) \in \left[-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}\right] \times \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$ tel que $y = x+h$, donc d'après (**)

$$\begin{cases} \Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x) \\ \Phi_g(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_g^{(m)}(x) \end{cases}$$

mais par hypothèse de récurrence, nous avons $\Phi_f = \Phi_g$ sur $[-\frac{LA}{2}, \frac{LA}{2}]$, donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\Phi_f^{(m)} = \Phi_g^{(m)}$ sur $[-\frac{LA}{2}, \frac{LA}{2}]$, en particulier, nous avons

$$\forall m \in \mathbb{N}, \Phi_f^{(m)}(x) = \Phi_g^{(m)}(x),$$

et compte tenue de ce qui précède, on obtient $\Phi_f(x+h) = \Phi_g(x+h)$ ou encore $\Phi_f(y) = \Phi_g(y)$. Par suite $\Phi_f = \Phi_g$ sur $[-\frac{(l+1)A}{2}, \frac{(l+1)A}{2}]$. Ce qui montre donc que la propriété $\mathcal{P}(l+1)$ est vraie. On conclue alors que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(l)$ est vraie ou encore : pour tout $l \in \mathbb{N}$ et toute fonction g de E admettant des moments de tous ordres tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = a_k(g)$, alors $\Phi_f(x) = \Phi_g(x)$ pour tout $x \in [-\frac{LA}{2}, \frac{LA}{2}]$.

18. On conclue d'après la question précédente et du fait que les segments $([-\frac{LA}{2}, \frac{LA}{2}])_{l \in \mathbb{N}}$ recouvrent $\mathbb{R}$, que si g est une fonction de E admettant des moments de tous ordres et verifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = a_k(g)$, alors $\Phi_f(x) = \Phi_g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par le **9**) : $f = g$
19. Soit $f \in E$, admettant des moments de tous ordre et vérifiant

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}.$$

Comme $a_0(f) = 1$, alors par une simple récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n}(f) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\ a_{2n+1}(f) = 0 \end{cases}$ (**).

D'autre part,

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{2n}. \quad (a_{2n}(f))^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n} \cdot (1.3 \dots (2n-1))^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{2n} \cdot ((2n-1)^n)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n} \cdot (2n-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc la suite $(\frac{1}{2n} \cdot (a_{2n}(f))^{\frac{1}{2n}})_{n \geq 1}$ converge vers 0. Elle est donc bornée.

Donc d'après le **16.**, il existe $A > 0$, tel que $\Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(x)$ pour tout réel x et pour tout h tel que $|h| < A$, en particulier :

$$\Phi_f(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \Phi_f^{(m)}(0), \text{ pour tout } h \text{ tel que } |h| < A.$$

Mais d'après le **1**), $\Phi_f^{(m)}(0) = i^m \cdot a_m(f)$. Donc compte tenue de la formule (**), on peut écrire $\Phi_f(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m h^{2m}}{2^m \cdot m!}$ pour tout h tel que $|h| < A$. Or $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m h^{2m}}{2^m \cdot m!} = e^{-\frac{h^2}{2}}$. D'où $\Phi_f(h) = e^{-\frac{h^2}{2}}$, pour tout h tel que $|h| < A$.

D'autre part, d'après le resultat admis dans l'énoncé, $\int_{\mathbb{R}} e^{ihx} \cdot (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}) dx = e^{-\frac{h^2}{2}}$ pour tout h , ou encore $\Phi_g(h) = e^{-\frac{h^2}{2}}$ où on a posé $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout x réel. On a donc $\forall h$, tel que $|h| < A$, $\Phi_f(h) = \Phi_g(h)$. Donc $\forall k$, $\Phi_f^{(k)}(0) = \Phi_g^{(k)}(0)$ ou encore $\forall k$, $a_k(f) = a_k(g)$, donc d'après le **18**), $f = g$.

Réciproquement, la fonction g si dessus est élément de E et si $k \geq 1$, alors la fonction $x \rightarrow x^{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a_{2k}(g) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} \cdot (-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}) dx$, et par intégration par partie :

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} \cdot (-x e^{-\frac{x^2}{2}}) dx = [x^{2k-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}]_{-\infty}^{+\infty} - (2k-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Or $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^{2k-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} \cdot (-\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}) dx = -(2k-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

et par suite $a_{2k}(g) = (2k-1) \cdot a_{2k-2}(g)$. D'autre part, $a_{2k-1}(g) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$, puisque la fonction sous l'intégrale est impaire. Donc g est solution du système.

Finalement la seule solution du système proposé est la fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$