

1. S^{n-1} est un fermé borné de l'espace vectoriel normé de dimension finie \mathbb{R}^n , c'est donc un compact de \mathbb{R}^n .

D'autre part, la continuité de l'application norme sur le compact S^{n-1} assure l'existence de ce maximum.

2. ..

- Cette application vérifie la propriété de positivité.

- L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se font comme pour la norme infinie.

- Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\|M\|_{op} = 0$, alors $\max \{\|Mx\| ; x \in S^{n-1}\} = 0$, donc $\|Mx\| = 0$ pour tout $x \in S^{n-1}$ et si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$\left\| M \frac{y}{\|y\|} \right\| = 0$, donc $\frac{1}{\|y\|} \|My\|$ soit $My = 0$. Par suite $M = 0$. D'autre part, on vérifie que si $M = 0$, alors $\|M\|_{op} = 0$.

D'où la séparation.

Par suite l'application $M \rightarrow \|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\left\| M \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|M\|_{op}$ ou encore $\|My\| \leq \|M\|_{op} \|y\|$. Inégalité valable si $y = 0$. Par suite

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \|My\| \leq \|M\|_{op} \|y\|$$

Et si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors $\|Mx - My\| = \|M(x - y)\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$. D'où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$$

3. Soit $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale, alors pour tout $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$, $Mx = {}^t(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ et si $k \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $|\lambda_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, alors

$$\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \cdot x_i^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \cdot x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_k|^2 \cdot x_i^2 = |\lambda_k|^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = |\lambda_k|^2 \|x\|^2 = |\lambda_k|^2$$

Donc

$$\|Mx\| \leq |\lambda_k|$$

Et cette inégalité devient une égalité pour $x = e_k \in S^{n-1}$ ($k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n)

Donc

$$\|M\|_{op} = \max \{ \|Mx\| ; x \in S^{n-1} \} = |\lambda_k|$$

Mais

$$\sigma(M) = \{\lambda_i ; 1 \leq i \leq n\}$$

Donc

$$\|M\|_{op} = \max \{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma(M) \}$$

Si maintenant M est symétrique réelle quelconque, alors d'après le théorème spectral, M est orthogonalement diagonalisable, donc ils existent $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale à coefficients réels et $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telles que $M = P.D.P^{-1}$.

Donc compte tenu du fait que P conserve la norme $\|\cdot\|$ euclidienne de \mathbb{R}^n ,

$$\{ \|Mx\| ; x \in S^{n-1} \} = \{ \|P.D.P^{-1}x\| ; x \in S^{n-1} \} = \{ \|D.P^{-1}x\| ; x \in S^{n-1} \}$$

Mais pour la même raison (P conserve la norme $\|\cdot\|$), l'application définie de S^{n-1} dans lui même qui à x associe $P^{-1}x$ est bijective, par suite

$$\{ \|D.P^{-1}x\| ; x \in S^{n-1} \} = \{ \|D.y\| ; y \in S^{n-1} \}$$

Donc

$$\{ \|Mx\| ; x \in S^{n-1} \} = \{ \|D.y\| ; y \in S^{n-1} \}$$

Par suite

$$\|M\|_{op} = \max \{ \|Mx\| ; x \in S^{n-1} \} = \max \{ \|D.y\| ; y \in S^{n-1} \} = \|D\|_{op}$$

Mais compte tenue de la première étape,

$$\|D\|_{op} = \max \{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma(D) \}$$

Or

$$\sigma(M) = \sigma(D) = \{\lambda_i ; 1 \leq i \leq n\}$$

D'où

$$\|M\|_{op} = \max \{ |\lambda| ; \lambda \in \sigma(M) \}$$

4. C'est classique

$$\begin{cases} \sigma(J_n) = \{0, n\} \\ E_0(J_n) = \text{vect}(e_1 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n) \\ E_n(J_n) = \text{vect}(e_1 + \dots + e_n) \end{cases}$$

où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n . En particulier $\begin{cases} \dim E_0(J_n) = n - 1 \\ \dim E_n(J_n) = 1 \end{cases}$.

En particulier $\max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(J_n)\} = n$ et donc compte tenu du résultat de la troisième question,

$$\|J_n\|_{op} = n$$

5. Soit i, j dans $\{1, \dots, n\}$, alors par définition de $\|M\|_{op}$, on a $\|M.e_j\| \leq \|M\|_{op}$, mais $M.e_j = \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{n,j} \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne

de M , donc

$$\left(\sum_{k=1}^n M_{k,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|M\|_{op}$$

Mais $|M_{i,j}| \leq \left(\sum_{k=1}^n M_{k,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, donc $|M_{i,j}| \leq \|M\|_{op}$.

Par suite

$$\max\{|M_{i,j}| ; 1 \leq i, j \leq n\} \leq \|M\|_{op}.$$

6. Soit $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|M.x\|$.

Un calcul donne

$$M.x = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n M_{1,j}.x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n M_{n,j}.x_j \end{pmatrix}$$

donc

$$\|M.x\| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ fixé, on a par inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right).$$

Ou encore puisque $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$,

$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$

Donc compte tenue de ce qui précède on obtient,

$$\|M\|_{op} = \|M.x\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, cette inégalité est une égalité ssi

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ssi

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)$$

ssi

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}.x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

Puisque toujours d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

Donc il y'a égalité

$$\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, il y'a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

ssi $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, les vecteurs $(M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$ et $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ sont liés
ssi tous les vecteurs lignes de M sont proportionnel à $x \neq 0$.

ssi le rang de M est ≤ 1 .

En conclusion, la condition cherchée est

$$rg(M) \leq 1.$$

7. Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans Σ_n , alors $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} = (n^2)^{\frac{1}{2}} = n \quad (*)$$

Et compte tenu du résultat de la question 6 précédente, il vient

$$\|M\|_{op} \leq n.$$

On a donc

$$\|M\|_{op} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n$$

D'autre part, supposons $\|M\|_{op} = n$, alors d'après les inégalités précédentes,

$$\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le 6), la première égalité implique $rg(M) \leq 1$ et donc $rg(M) = 1$ puisque $\|M\|_{op} = n \neq 0$.

La deuxième égalité et le fait que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j}^2 \leq 1$ implique $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.

Donc l'égalité $\|M\|_{op} = n$ implique $rg(M) = 1$ et $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.

Réciproquement, supposons $rg(M) = 1$ et $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.

Alors $rg(M) \leq 1$, donc d'après le résultat de la question 6), on a l'égalité $\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ et comme

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, M_{i,j}^2 = 1.$$

Alors

$$\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} = (n^2)^{\frac{1}{2}} = n$$

Donc il y'a égalité $\|M\|_{op} = n$ ssi $rg(M) = 1$ et $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.

Notons alors

$$E = \left\{ M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; rg(M) = 1 \text{ et } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, M_{i,j}^2 = 1. \right\}$$

Et pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, notons $X_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Alors on vérifie que E est l'ensemble des matrices dont les colonnes sont $(X_\varepsilon, \mu_1 \cdot X_\varepsilon, \dots, \mu_{n-1} \cdot X_\varepsilon)$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ et $\mu_1, \dots, \mu_{n-1} \in \{-1, 1\}$ et que l'application définie de $\{-1, 1\}^n \times \{-1, 1\}^{n-1}$ qui à $(\varepsilon, (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}))$ associe la matrice dont les colonnes sont $(X_\varepsilon, \mu_1 \cdot X_\varepsilon, \dots, \mu_{n-1} \cdot X_\varepsilon)$ est bijective. En particulier

$$\text{card}(E) = 2^n \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}.$$

8. Soit t réel.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $2 \leq n+k$, donc

$$2^n = \prod_{k=1}^n 2 \leq \prod_{k=1}^n (n+k) \text{ et } 2^n \cdot n! \leq n! \prod_{k=1}^n (n+k) = (2n)!$$

De plus cette inégalité est valable pour $n = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \cdot n! \leq (2n)!$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

ou encore

$$ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

9. Comme $x \in [-1, 1]$, alors $\frac{1+x}{2} \in [0, 1]$ et par convexité de la fonction exponentielle, on a

$$\exp\left(\frac{1+x}{2} \cdot t + \left(1 - \frac{1+x}{2}\right) \cdot (-t)\right) \leq \frac{1+x}{2} \cdot \exp(t) + \left(1 - \frac{1+x}{2}\right) \cdot \exp(-t).$$

Ou encore après simplification :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \cdot \exp(t) + \left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot \exp(-t).$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Comme X admet une espérance finie (nulle), alors d'après le théorème de transfert, $\exp(tX)$ admet aussi une espérance finie et

$$E(\exp(tX)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx) \cdot P(X=x) \quad (*)$$

D'autre part comme X est bornée par 1, alors $X(\Omega) \subset [-1, 1]$, donc d'après le 9, on a pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \cdot \exp(t) + \left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot \exp(-t) = ch(t) + x \cdot sh(t)$$

Et compte tenue de la positivité de P , on a pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\exp(tx) \cdot P(X=x) \leq ch(t) \cdot P(X=x) + sh(t) \cdot (x \cdot P(X=x)). \quad (**)$$

Or les familles $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(x \cdot P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ sont sommables et

$$\begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1 \text{ car } ((X=x))_{x \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements} \\ \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) = E(X) = 0 \text{ car } X \text{ est supposée centrée} \end{cases}$$

Donc les familles $(ch(t) \cdot P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(sh(t) \cdot (x \cdot P(X=x)))_{x \in X(\Omega)}$ sont sommables et

$$\begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} ch(t) \cdot P(X=x) = ch(t) \\ \sum_{x \in X(\Omega)} sh(t) \cdot (x \cdot P(X=x)) = 0 \quad (***) \end{cases}$$

Donc compte tenues de (*), (**) et (***),

$$E(\exp(tX)) \leq ch(t).$$

Mais par le 8,

$$ch(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc

$$E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Et ceci pour tout t réel. Donc X est 1-sous-gaussienne.

Si maintenant X est bornée par α et centrée, alors on vérifie que $\frac{1}{\alpha}X$ est bornée par 1 et centrée.

Donc d'après ce qui précède, $\frac{1}{\alpha}X$ est 1-sous-gaussienne.

Donc pour tout t réel,

$$E\left(\exp\left(t \cdot \left(\frac{1}{\alpha}X\right)\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{\alpha}t \cdot X\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$E(\exp(t \cdot X)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

Donc X est α -sous-gaussienne.

11. Soit t réel.

Comme X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance finie, alors les variables aléatoires $\exp(t \cdot \mu_1 \cdot X_1), \dots, \exp(t \cdot \mu_n \cdot X_n)$ sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance finie, donc leur produit $\exp(t \cdot \mu_1 \cdot X_1) \dots \exp(t \cdot \mu_n \cdot X_n)$ admet une espérance finie et

$$E(\exp(t \cdot \mu_1 \cdot X_1) \dots \exp(t \cdot \mu_n \cdot X_n)) = E(\exp(t \cdot \mu_1 \cdot X_1)) \dots E(\exp(t \cdot \mu_n \cdot X_n))$$

Mais

$$\exp(t \cdot \mu_1 \cdot X_1) \dots \exp(t \cdot \mu_n \cdot X_n) = \exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot X_i\right)$$

et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, X_i est α -sous-gaussienne, donc .

$$E(\exp(t \cdot \mu_i \cdot X_i)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 (t \cdot \mu_i)^2}{2}\right)$$

Donc

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 (t \cdot \mu_1)^2}{2}\right) \dots \exp\left(\frac{\alpha^2 (t \cdot \mu_n)^2}{2}\right)$$

ou encore

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 (\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2)}{2}\right)$$

Et compte tenu de l'hypothèse $\mu_1^2 + \dots + \mu_n^2 = 1$, on obtient

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Donc $\sum_{i=1}^n \mu_i \cdot X_i$ est α -sous-gaussienne.

12. Soit $t > 0$.

Alors on vérifie que

$$(X \geq \lambda) = (\exp(t \cdot X) \geq \exp(t \cdot \lambda))$$

et donc

$$P(X \geq \lambda) = P(\exp(t \cdot X) \geq \exp(t \cdot \lambda)) \quad (*)$$

Mais la variable aléatoire X est supposé α -sous-gaussienne. donc $\exp(t \cdot X)$ admet une espérance finie et de plus c'est une variable aléatoire positive.

Donc d'après l'inégalité de Markov,

$$P(\exp(t \cdot X) \geq \exp(t \cdot \lambda)) \leq \frac{E(\exp(t \cdot X))}{\exp(t \cdot \lambda)}$$

Mais toujours puisque X est supposé α -sous-gaussienne, alors

$$E(\exp(t \cdot X)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Donc

$$P(\exp(t \cdot X) \geq \exp(t \cdot \lambda)) \leq \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}{\exp(t \cdot \lambda)}$$

ou encore

$$P(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

Et compte tenu de l'égalité (*), on obtient :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right). (**)$$

D'autre part,

$$(|X| \geq \lambda) = (X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)$$

Donc

$$P(|X| \geq \lambda) = P((X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)) \leq P(X \geq \lambda) + P(-X \geq \lambda) (***)$$

Mais comme X est supposé α -sous-gaussienne, alors on vérifie sans peine que $-X$ est aussi α -sous-gaussienne.

$$\text{Donc en appliquant l'inégalité (**)} \text{ à } X \text{ et à } -X, \text{ on obtient } \begin{cases} P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right) \\ P(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right) \end{cases}$$

Et compte tenu de l'inégalité (***), on obtient

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

On a donc montré que pour tout $t > 0$,

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \cdot \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En appliquant cette inégalité pour $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$, on obtient l'inégalité demandée, soit

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

13. Supposons X est d'espérance finie donc d'après le théorème de transfert, $[X]$ est d'espérance finie et

$$E([X]) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x] \cdot P(X = x) (*)$$

de plus comme $[X]$ est à valeurs dans \mathbb{N} puisque X est supposée à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Donc d'après le résultat admis, la série $\sum P([X] \geq k)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k) = E([X]) (**)$$

Or

$$\forall k \geq 1, P(X \geq k) = P([X] \geq k), (***)$$

puisqu'on vérifie sans peine l'égalité $(X \geq k) = ([X] \geq k)$ pour tout $k \geq 1$.

Donc la série $\sum P(X \geq k)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k)$$

Et compte tenu des égalités (*) et (**), on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = \sum_{x \in X(\Omega)} [x] \cdot P(X = x)$$

Mais

$$\sum_{x \in X(\Omega)} [x] \cdot P(X = x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x) = E(X).$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X).$$

Réciproquement, supposons la convergence de la série $\sum P(X \geq k)$, donc la série $\sum P([X] \geq k)$ de plus $[X]$ est à valeurs dans \mathbb{N} ,

donc d'après le résultat admis, $[X]$ admet une espérance finie et

$$E([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k) (1)$$

donc d'après le théorème de transfert, X admet une espérance finie.

Mais $X \leq 1 + [X]$, donc par croissance de l'espérance,

$$E(X) \leq 1 + E([X])$$

ou encore, en tenant compte de l'égalité (1),

$$E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k)$$

ou encore, en tenant compte de la relation (**),

$$E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

14. Soit $k > 0$.

On vérifie l'égalité

$$\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right) \geq k \right) = \left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)} \right) \quad (*)$$

Mais compte tenu du résultat du 12),

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2 \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2 \cdot \alpha^2}\right)$$

ou encore

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2 \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2 \cdot \alpha^2}\right)$$

Mais après simplification,

$$2 \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2 \cdot \alpha^2}\right) = 2 \cdot k^{-\eta}$$

Donc

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta} \cdot \sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2 \cdot k^{-\eta}$$

Et en tenant compte de l'égalité (*), on obtient

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2 \cdot k^{-\eta}. (**)$$

D'autre part, si $\alpha \cdot \beta < 1$, alors $\eta = \frac{1}{\alpha^2 \cdot \beta^2} < 1$, donc la série de Riemann $\sum 2 \cdot k^{-\eta}$ converge et donc compte tenue de l'inégalité (**)

précédente, la série $\sum P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right) \geq k\right)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot k^{-\eta} = 2\zeta(\eta). (***)$$

Mais la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , donc d'après le résultat du 13), $\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie et

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right)\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right) \geq k\right)$$

D'où

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 \cdot X^2}{2}\right)\right) \leq 1 + 2\zeta(\eta)$$

15. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour toute partie finie A de K , K n'est pas inclus dans $\bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$ et notons \mathcal{H}

cette hypothèse.

K étant supposé non vide, donc contient un vecteur x_0 , et l'hypothèse \mathcal{H} appliquée à la partie $\{x_0\}$ assure l'existence de x_1 dans

$$K \setminus B_{x_0, \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Soit $n \geq 1$ et supposons l'existence de x_0, \dots, x_n dans K , tels que pour tout

$$k \in \{1, \dots, n\}, x_k \in K \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Encore l'hypothèse \mathcal{H} appliqué à la partie $\{x_0, \dots, x_n\}$ assure l'existence de x_{n+1} dans $K \setminus \bigcup_{i=0}^n B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}}$.

On a donc construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{i=0}^n B_{x_i, \frac{\varepsilon}{2}} \quad (*)$$

Et comme K est compact, alors on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans K et si on note l sa

limite, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $\|x_{\varphi(n)} - l\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq p, \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier,

$$x_{\varphi(p+1)} \in B_{x_{\varphi(p)}, \frac{\varepsilon}{2}}$$

Ceci contredit l'hypothèse (*).

D'où l'existence d'un sous-ensemble fini A de K tel que

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$$

16. Soit A un ensemble du type considéré à la question précédente et notons p son cardinal.

On va raisonner par l'absurde et supposons que Λ contient au moins $p+1$ éléments x_1, \dots, x_{p+1} distincts deux à deux.

D'autre part, comme $\Lambda \subset K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$, alors

$$\forall i \in \{1, \dots, p+1\}, \exists a_i \in A \text{ tel que } x_i \in B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

D'autre part, puisque $\text{card}(A) = p$, alors $\exists i, j \in \{1, \dots, p+1\}$ tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$.

Donc x_i et x_j sont dans la même boule $B_{a_i, \frac{\varepsilon}{2}}$, donc $\begin{cases} \|x_i - a_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_j - a_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ et par l'inégalité triangulaire, $\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon$.

Ceci contredit l'hypothèse :

$$\forall x \neq y \in \Lambda, \|x - y\| \geq \varepsilon \quad (*)$$

Donc Λ est fini et son cardinal est majoré par celui de A .

Si de plus Λ est de cardinal maximal parmi les sous ensembles de K vérifiant la propriété (*) précédente, alors $K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$.

En effet raisonnons par l'absurde et supposons K non inclus dans $\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$, alors il existe $b \in K$ et $b \notin \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$, donc

$$\forall a \in \Lambda, \|b - a\| \geq \varepsilon.$$

Donc si on note $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$, alors Λ' vérifie la propriété (*) si dessus et $\text{card}(\Lambda') = \text{card}(\Lambda) + 1 > \text{card}(\Lambda)$.

Ceci contredit l'hypothèse faite sur Λ .

D'où

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$$

Remarque :

L'existence de Λ partie de K et de cardinal maximal parmi les sous ensembles de K vérifiant la propriété (*), découle du fait que

la partie $\{\text{card} \Delta \mid \Delta \subset K \text{ et } \Delta \text{ vérifie } (*)\}$ est une partie de \mathbb{N} non vide et majorée par $\text{card}(A)$

17. Soit $a \in \Lambda$. Si $x \in B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|$$

Mais $\Lambda \subset S^{n-1}$, donc $\|a\| = 1$.

Donc

$$\|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$$

Par suite

$$B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$$

En particulier

$$\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$$

Donc

$$\mu \left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \right) \leq \mu \left(B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right)$$

Or Λ vérifie l'hypothèse (*) donc les compacts $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\mu \left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \right) = \sum_{a \in \Lambda} \mu \left(B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \right) = \sum_{a \in \Lambda} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^n = \text{card}(\Lambda) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^n$$

Et en tenant compte de l'inégalité précédente, on obtient

$$\text{card}(\Lambda) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^n \leq \mu \left(B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right)^n$$

ou encore

$$\text{card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} \right)^n$$

18. Soit $a \in S^{n-1}$ et $b = -a$, alors $\|a - b\| = 2$. $\|a\| = 2 > \frac{1}{2}$.

Donc en prenant $\Lambda = \{a, b\}$, alors Λ est un sous-ensemble du compact S^{n-1} , vérifiant

$$\forall x \neq y \in \Lambda, \|x - y\| \geq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Alors en appliquant le résultat du 16), si on note Λ_n un sous ensemble de S^{n-1} de cardinal maximal parmi les sous ensembles de

S^{n-1} vérifiant la propriété (*) ci dessus, on obtient

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$$

Et en appliquant le résultat du 17) à Λ_n , on obtient

$$\text{card}(\Lambda_n) \leq \left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^n = 5^n$$

19. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Alors

$$y_i = \sum_{j=1}^n x_j \cdot M_{i,j}^{(n)} \quad (*)$$

Mais par hypothèse $\sum_{j=1}^n (x_j)^2 = 1$ puisque $x \in S^{n-1}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $M_{i,1}^{(n)}, \dots, M_{i,n}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes et

α -sous-gaussienne, donc d'après le résultat du 11), $y_i = \sum_{j=1}^n x_j \cdot M_{i,j}^{(n)}$ est α -sous-gaussienne.

Donc d'après le résultat du 14), dit inégalité d'Orlicz,

$$0 \leq E \left(\exp \left(\gamma \cdot y_i^2 \right) \right) \leq 5$$

et ceci pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donc

$$\prod_{i=1}^n E \left(\exp \left(\gamma \cdot y_i^2 \right) \right) \leq 5^n \quad (**)$$

D'autre part, les variables aléatoires $M_{i,j}^{(n)}$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sont par hypothèse mutuellement indépendantes, donc en tenant

compte des égalités (*) ci dessus, les y_i sont aussi mutuellement indépendantes, donc les $\exp(\gamma \cdot y_i^2)$ sont aussi mutuellement indépendantes, par suite

$$\prod_{i=1}^n E(\exp(\gamma \cdot y_i^2)) = E\left(\prod_{i=1}^n \exp(\gamma \cdot y_i^2)\right)$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^n E(\exp(\gamma \cdot y_i^2)) = E(\exp(\gamma \cdot \|y\|^2))$$

Donc en tenant compte de l'inégalité (**) ci dessus, on obtient

$$E(\exp(\gamma \cdot \|y\|^2)) \leq 5^n (***)$$

Soit maintenant $r > 0$.

On vérifie sans peine l'égalité

$$(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = (\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n))$$

Donc

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = P(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)) (***)$$

Mais d'après l'inégalité de Markov,

$$P(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)) \leq \frac{E(\exp(\gamma \|y\|^2))}{\exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)}$$

Et en tenant compte de l'inégalité (***) si dessus, on obtient

$$P(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)) \leq \frac{5^n}{\exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)}$$

ou encore

$$P(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma \cdot r^2 \cdot n)) \leq (5 \cdot \exp(-\gamma \cdot r^2))^n$$

Enfin en tenant compte de l'égalité (****), on obtient,

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5 \cdot \exp(-\gamma \cdot r^2))^n$$

En conclusion,

$$\forall x \in S^{n-1}, P(\|M^{(n)} \cdot x\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5 \cdot \exp(-\gamma \cdot r^2))^n$$

20. Soit $r > 0$ et supposons $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{n}$.

Soit $x \in S^{n-1}$ tel que

$$\|M^{(n)}\|_{op} = \|M^{(n)} \cdot x\| (*)$$

. On a donc

$$\|M^{(n)} \cdot x\| \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{n} (**)$$

Mais comme $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$, alors il existe $a \in \Lambda_n$ tel que $x \in B_{a, \frac{1}{2}}$, donc

$$\|x - a\| \leq \frac{1}{2} (***)$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire et le résultat du 2) et l'égalité (*) ci dessus on obtient successivement

$$= \|M^{(n)} \cdot a - M^{(n)} \cdot x + M^{(n)} \cdot x\| \geq \|M^{(n)} \cdot x\| - \|M^{(n)} \cdot a - M^{(n)} \cdot x\| \geq \|M^{(n)} \cdot x\| (1 - \|x - a\|)$$

ou encore en utilisant les inégalités (**) et (***) ci dessus, on obtient

$$\|M^{(n)} \cdot a\| \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = r \cdot \sqrt{n}$$

On vient alors de montrer l'inclusion

$$\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{n}\right) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \left(\|M^{(n)} \cdot a\| \geq r \cdot \sqrt{n}\right)$$

Donc par croissance de P ,

$$P\left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{n}\right) \leq P\left(\bigcup_{a \in \Lambda_n} \|M^{(n)} \cdot a\| \geq r \cdot \sqrt{n}\right)$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{a \in \Lambda_n} \|M^{(n)} \cdot a\| \geq r \cdot \sqrt{n}\right) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} \left(P\left(\|M^{(n)} \cdot a\| \geq r \cdot \sqrt{n}\right)\right)$$

Mais d'après le 19),

$$P \left(\|M^{(n)}.a\| \geq r.\sqrt{n} \right) \leq \left(5.\exp \left(-\gamma.r^2 \right) \right)^n$$

Donc

$$\sum_{a \in \Lambda_n} \left(P \|M^{(n)}.a\| \geq r.\sqrt{n} \right) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} \left(5.\exp \left(-\gamma.r^2 \right) \right)^n = \text{card}(\Lambda_n) \cdot \left(5.\exp \left(-\gamma.r^2 \right) \right)^n$$

Et en tenant compte des deux inégalités précédentes, on obtient

$$P \left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n} \right) \leq \text{card}(\Lambda_n) \cdot \left(5.\exp \left(-\gamma.r^2 \right) \right)^n$$

ou encore puisque d'après le 18), $\text{card}(\Lambda_n) \leq 5^n$,

$$P \left(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n} \right) \leq \left(25.\exp \left(-\gamma.r^2 \right) \right)^n$$