

Corrigé PT 2019, épreuve B.

Première partie.

1. (a) Par définition d'une projection orthogonale, le point H_0 est d'une part un point de la droite D , donc ses coordonnées (x, y) satisfont $ax + by + c = 0$. D'autre part, il est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_0H_0}$ est orthogonal à la droite D . Or, au vu de l'équation $ax + by + c = 0$ de D , le vecteur de coordonnées (a, b) est un vecteur normal à D , donc colinéaire à $\overrightarrow{M_0H_0}$, donc leur déterminant est nul, ce qui donne la relation $a(y - y_0) - b(x - x_0) = 0$, soit encore $-bx + ay = ay_0 - bx_0$. On dispose donc des relations :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} ax + by = -c & L_1 \\ -bx + ay = ay_0 - bx_0 & L_2 \end{cases} \\ \text{donc } & \begin{cases} x = \frac{-ac - aby_0 + b^2x_0}{a^2 + b^2} & aL_1 - bL_2 \\ y = \frac{-bc + a^2y_0 - abx_0}{a^2 + b^2} & bL_1 + aL_2 \end{cases} \\ \text{donc } & \begin{cases} x = \frac{-ac - aby_0 + (a^2 + b^2)x_0 - a^2x_0}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-bc + (a^2 + b^2)y_0 - b^2y_0 - abx_0}{a^2 + b^2} \end{cases} \\ \text{donc } & \begin{cases} x = x_0 - a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \\ y = y_0 - b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La distance $d(M_0, D)$ entre le point M_0 et la droite D est alors égale à la longueur M_0H_0 , qui vaut donc :

$$d(M_0, D) = H_0M_0 = \sqrt{\left(a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. (b) La droite D_{-1} admet pour équation $2y = 4$, soit $y - 2 = 0$: c'est une droite horizontale.
La droite D_0 admet pour équation $-x = 0$, soit encore $x = 0$: c'est l'axe des ordonnées.
La droite D_1 admet pour équation $-2y = 0$, soit encore $y = 0$: c'est l'axe des abscisses.

Soit M un point, de coordonnées (x, y) , équidistant des trois droites D_1 , D_{-1} et D_0 . On utilise la question préliminaire pour interpréter les conditions d'équidistance :

$$\begin{aligned} & d(M, D_{-1}) = d(M, D_0) = d(M, D_1) \\ \text{donc } & |y - 2| = |x| = |y| \\ \text{donc } & \begin{cases} |y| = |y - 2| \\ |x| = |y| \end{cases} \\ \text{donc } & \begin{cases} y = y - 2 \\ |x| = |y| \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 2 - y \\ |x| = |y| \end{cases} \\ \text{donc } & \text{impossible ou } \begin{cases} y = 1 \\ x \in \{-1, 1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc exactement deux points équidistants des trois droites D_{-1} , D_0 et D_1 , qui sont les points de coordonnées $(-1, 1)$ et $(1, 1)$.

(b) Un point équidistant de toutes les droites D_t est en particulier équidistant des droites D_0 , D_1 et D_{-1} , ce qui justifie de limiter la recherche aux deux points obtenus à la question 2(a).

Considérons le point A de coordonnées $(-1, 1)$, et, pour $t \in \mathbf{R}$, calculons sa distance à la droite D_t (à l'aide de la question préliminaire). On trouve :

$$d(A, D_t) = \frac{|-(t^2 - 1) - 2t - 2t(t - 1)|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2}} = \frac{|1 - 3t^2|}{\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}} = \frac{|1 - 3t^2|}{t^2 + 1}.$$

Cette fonction de la variable t prend aux points $t \in \{-1, 0, 1\}$ la même valeur 1 (en cohérence avec le résultat de la question 2(a)), mais n'est pas constante (elle prend par exemple la valeur $11/5 \neq 1$ en $t = 2$). Le point A n'est donc pas équidistant de toutes les droites D_t .

Reprenons le même calcul pour le point B de coordonnées $(1, 1)$:

$$d(B, D_t) = \frac{|(t^2 - 1) - 2t - 2t(t - 1)|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + (-2t)^2}} = \frac{|-1 - t^2|}{\sqrt{(t^2 + 1)^2}} = 1,$$

ce qui prouve que le point B est équidistant de toutes les droites D_t .

3. (a) La droite D_t admettant pour équation $(t^2 - 1)x - 2ty = 2t(t - 1)$, le vecteur de coordonnées $(t^2 - 1, -2t)$, qui est non nul pour tout t car les deux coordonnées ne peuvent s'annuler simultanément, en est un vecteur normal, et donc, le vecteur $\vec{u}(t)$ de coordonnées $(2t, t^2 - 1)$, qui lui est orthogonal et qui est non nul, est un vecteur directeur de D_t .

Par ailleurs, on vérifie immédiatement par substitution que le point $M(t)$ de coordonnées $(0, 1 - t)$ appartient à D_t .

La droite D_t admet donc pour paramétrage $M(t) + \mathbf{R}\vec{u}(t)$, soit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(u) = 2ut \\ y(u) = 1 - t + u(t^2 - 1), \end{cases} \quad u \in \mathbf{R}.$$

(b) Cherchons maintenant l'enveloppe Γ de la famille de droite $(D_t)_t$ sous la forme d'une courbe paramétrée par une fonction $t \mapsto \varphi(t)$, de sorte que pour tout t , la droite D_t est tangente à la courbe Γ en $\varphi(t)$. Ceci justifie de chercher $\varphi(t)$ sous la forme :

$$\varphi(t) = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t),$$

de sorte que $\varphi(t) \in D_t$; et d'imposer la colinéarité de $\varphi'(t)$ et $\vec{u}(t)$, de façon à assurer la tangence de D_t à Γ ; ce qui impose les égalités :

$$\begin{aligned} \det(\varphi'(t), \vec{u}(t)) &= 0 \\ \text{donc } \det(M'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) &= 0 \\ \text{donc } \det(M'(t), \vec{u}(t)) + \lambda(t)\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) &= 0 \\ \text{par linéarité à gauche du déterminant et car } \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\det(M'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} 0 & 2t \\ -1 & t^2 - 1 \end{vmatrix} = 2t \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} 2 & 2t \\ 2t & t^2 - 1 \end{vmatrix} = -2(1 + t^2),$$

ce qui amène à :

$$\lambda(t) = -\frac{2t}{-2(1 + t^2)} = \frac{t}{1 + t^2},$$

puis à (en assimilant un point à ses coordonnées écrites en colonnes) :

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 + \frac{t}{1+t^2} \times (2t) \\ 1 - t + \frac{t}{1+t^2}(t^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t^2}{1+t^2} \\ \frac{(1-t)(1+t^2-t(t+1))}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t^2}{1+t^2} \\ \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

ce qui est le résultat attendu.

4. (a) La courbe Γ' est le cercle de rayon 1 centré en le point de coordonnées $(1, 1)$, parcouru dans le sens direct.

(b) En particulier, Γ' admet pour équation cartésienne $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Pour montrer l'inclusion $\Gamma \subset \Gamma'$, on substitue les coordonnées du paramétrage de Γ (obtenu à la question précédente) dans l'équation de

Γ' :

$$\begin{aligned}
 (x-1)^2 + (y-1)^2 &= \left(\frac{2t^2}{1+t^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2}{1+t^2} - 1\right)^2 \\
 &= \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2t}{1+t^2}\right)^2 \\
 &= \frac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{(t^2+1)^2} \\
 &= \frac{(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inclusion $\Gamma \subset \Gamma'$.

L'inclusion réciproque est fautive : le point de coordonnées $(2, 0)$ appartient à Γ' (il correspond au paramètre $\theta = 0$), mais pas à Γ : en effet, la coordonnée $x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2}$ ne peut être égale à 2, car t^2 et $t^2 + 1$ ne peuvent être égaux.

(c) Le point de paramètre $t = 0$ de la courbe Γ a pour coordonnées $(1, 0)$. De plus, $y(t) = \frac{1-2t+t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{2t}{1+t^2}$, donc, pour $t > 0$, $y(t) < 1$: à partir du point de paramètre $t = 0$, en se déplaçant dans le sens des t croissants, on parcourt donc le demi-cercle « du bas », ce qui correspond à un parcours dans le sens direct. Les deux courbes sont donc bien parcourues dans le même sens.

5. (a) La développée d'une courbe régulière est le lieu des centres de courbure ; mais aussi l'enveloppe de la famille des normales.

(b) L'enveloppe d'une famille de droites (D_t) est une courbe dont les tangentes sont les courbes D_t .

(c) Les formules de Frénet s'écrivent :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T},$$

où s est une abscisse curviligne, γ la courbure, et (\vec{T}, \vec{N}) la base de Frénet.

6. (a) Notant $f(\theta) = (1 + \cos \theta, 1 + \sin \theta)$ le vecteur position de la courbe Γ' . Le vecteur vitesse admet alors pour coordonnées $(-\sin \theta, \cos \theta)$: il est de norme 1, donc, d'une part, l'abscisse curviligne s qui s'annule en 0 est simplement définie par $s(\theta) = \theta$ (unique primitive qui s'annule en 0 de la fonction constante 1 ; et, d'autre part, le premier vecteur de la base de Frénet, noté $\vec{T}(\theta)$ a aussi pour coordonnées $(-\sin \theta, \cos \theta)$. Le vecteur $\vec{N}(\theta)$ admet alors pour coordonnées $(-\cos \theta, -\sin \theta)$. L'origine du repère de Frénet est par définition le point $M(\theta)$.

(b) Par définition, le point $P_k(\theta)$ est encore $M(\theta) + (k - s(\theta))\vec{T}(\theta)$, donc a pour coordonnées

$$(1 + \cos(\theta) - (k - \theta) \sin(\theta), 1 + \sin(\theta) + (k - \theta) \cos(\theta)),$$

et un paramétrage en coordonnées cartésiennes de Λ_k est donc :

$$\theta \mapsto \left(\begin{array}{l} (1 + \cos(\theta) - (k - \theta) \sin(\theta)) \\ (1 + \sin(\theta) + (k - \theta) \cos(\theta)) \end{array} \right), \theta \in [0, 2\pi].$$

(c) Calculons le vecteur vitesse de ce paramétrage (toujours en coordonnées cartésiennes dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ; on remarque qu'on pourrait aussi directement calculer dans le repère de Frénet, mais on ne gagnerait guère de temps) :

$$\left(\begin{array}{l} -\sin \theta - (k - \theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \\ \cos(\theta) - (k - \theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \end{array} \right) = (k - \theta) \left(\begin{array}{l} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{array} \right) = (k - \theta)\vec{N}(\theta),$$

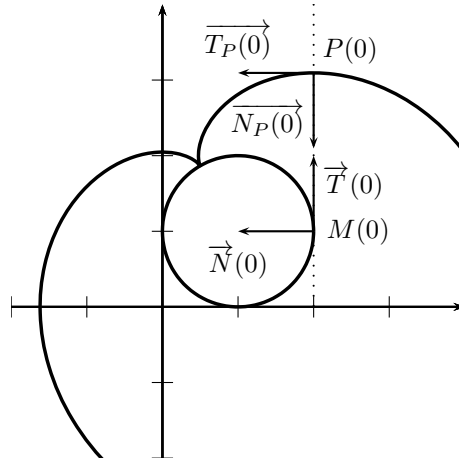
et ce vecteur vitesse s'annule uniquement lorsque $k - \theta = 0$ (puisque les fonctions \cos et \sin ne s'annulent pas simultanément). Donc, si $k \in [0, 2\pi]$, la courbe Λ_k admet un unique point non régulier, de paramètre $k = \theta$, et c'est le point $M(\theta)$ (qui appartient donc au cercle Γ'). En revanche, si $k \notin [0, 2\pi]$, la courbe Λ_k n'a que des

points réguliers.

(d) Cherchons la développée de Λ_k en tant qu'enveloppe de la famille des normales. Puisque le vecteur $\vec{N}(\theta)$ est colinéaire au vecteur vitesse de Λ_k au point de paramètre θ , le vecteur \vec{T} est lui orthogonal. Au point $P_k(\theta)$, la normale à Λ_k est donc la droite passant par $P_k(\theta)$ et dirigée par $\vec{T}(\theta)$. Or, au vu de la définition de $P_k(\theta)$, il s'agit de la droite $(P_k(\theta)M(\theta))$, et on constate que cette droite est tangente au cercle Γ' au point $M(\theta)$. De plus, lorsque θ parcourt $[0, 2\pi]$, on atteint ainsi toutes les tangentes à Γ' .

La famille des tangentes à la courbe Γ' est donc égale à la famille des normales à Λ_k : c'est donc la développée de Λ_k (il faut simplement dans le cas $k \in [0, 2\pi]$ la priver du point $M(k)$, qui est un point singulier de Λ_k).

7. (a) On choisit $k = 2\pi/3$ et $\theta = 0$ (ce qui permet d'avoir des vecteurs de Frénet colinéaires aux vecteurs du repère).



(b) Puisque $M(\theta)$ est le centre de courbure de Λ au point $P(\theta)$, la droite $(P(\theta)M(\theta))$ est la normale à Λ au point $P(\theta)$. Or, la développée étant l'enveloppe de la famille des normales, et cette développée étant par hypothèse incluse dans Γ' , cette normale est tangente à Γ' , et le point de tangence est donc $M(\theta)$. La tangente à Γ' en $M(\theta)$ étant par hypothèse dirigée par $\vec{T}(\theta)$, la droite $(P(\theta)M(\theta))$ est donc dirigée par $\vec{T}(\theta)$, d'où l'existence de λ tel que :

$$\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda \vec{T}(\theta).$$

(c) Par la relation de Chasles, on en déduit :

$$\overrightarrow{OP(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \lambda \vec{T}(\theta),$$

puis, par dérivation par rapport à θ :

$$\frac{d\overrightarrow{OP(\theta)}}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{OM(\theta)}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} \vec{T} + \lambda \frac{d\vec{T}}{d\theta}.$$

La définition du premier vecteur de la base de Frénet d'une abscisse curviligne, appliquées d'une part à Γ' et d'autre part à Λ permettent ensuite de transformer le membre de gauche et le premier terme du membre de droite; et le troisième terme du membre de droite s'obtient lui par une relation de Frénet, et la règle de dérivation d'une composée :

$$\frac{ds_P}{d\theta} \vec{T}_P = \frac{ds}{d\theta} \vec{T} + \frac{d\lambda}{d\theta} \vec{T} + \lambda \gamma \frac{ds}{d\theta} \vec{N}.$$

(d) En reprenant l'analyse géométrique au début de la question, on constate que le vecteur \vec{N}_P est colinéaire au vecteur \vec{T} (car ils dirigent tous deux la droite $(P(\theta)M(\theta))$), ce dont on déduit la colinéarité de \vec{T}_P et \vec{N} . Ainsi, la composante selon \vec{T} du vecteur \vec{T}_P est nulle, ce qui implique la relation $\frac{ds}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} = 0$ au vu de l'égalité précédente.

Deux fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle différent d'une constante, donc $s(\theta) + \lambda(\theta)$ est constant sur $[0, 2\pi]$, donc $\lambda(\theta) = -\theta + c$, pour une certaine constante c .

(e) En reprenant l'égalité $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta) \vec{T}(\theta)$, on en déduit $P(\theta) = M(\theta) - \lambda(\theta) \vec{T}(\theta) = M(\theta) + (s - \theta) \vec{T}(\theta)$, et donc Λ est bien une courbe Λ_k (pour $k = c$).

Deuxième partie.

1. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss, sur la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \stackrel{L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}(L_3 - 2L_2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \\ & \stackrel{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \\ & \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right), \end{aligned}$$

et l'inverse de la matrice M est donc :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. (a) On trouve :

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$N^2 - 3N + 2I = 0.$$

(b) On en déduit $N(N - 3I) = -2I$, donc $N \times (\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}N) = I$, et donc l'inverse de N est $\frac{3}{2}I - \frac{1}{2}N$, soit :

$$N^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) i. La formule de développement par rapport à la j -ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

(a) ii. Au vu de la définition de B , on a $A_{i,j} = B_{i,j}$ pour tout i (puisque A et B ne diffèrent qu'en leur j -ème colonne, les matrices obtenues en retirant la j -ème colonne à A et B respectivement sont égales). Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+J} a_{i,j'} \det(A_{i,j}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(B_{i,j}).$$

Or, la j -ème colonne de B étant égale à la j' -ème colonne de A , cette formule correspond au développement du déterminant de B par rapport à la j -ème colonne. Puisque B a deux colonnes égales (la j -ème et la j' -ème), elle n'est pas inversible, donc son déterminant est nul. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+J} a_{i,j'} \det(A_{i,j}) = \det(B) = 0.$$

(b)i. Par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}.$$

(b)ii. En prenant $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i})$, cette relation devient :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \det(A_{k,i}) a_{k,j} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

en utilisant la question (a)i si $i = j$ et la question (a)ii sinon. Ceci prouve bien que la matrice $C = BA$ est égale à $\det(A)I_n$.

(b)iii. Ainsi, si A est inversible, alors $\det(A)$ est non nul, et donc l'égalité devient $\frac{1}{\det(A)}BA = I_n$, donc l'inverse de A est $\frac{1}{\det(A)}B$.

4. (a) On calcule le déterminant dans la joie et la bonne humeur :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} uv - u & uv & u^2 - v \\ v - 1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} u^3 - u & u^3 & u^2 - v \\ v - 1 + 2u^2 & v + 2u^2 & 2u \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ = & -((u^3 - u)(v + 2u^2) - u^3(v - 1 + 2u^2)) \text{ développement par rapport à la troisième ligne} \\ = & u(u^2 + v), \end{aligned}$$

et donc la matrice $A(u, v)$ est inversible si $u \neq 0$ et $u^2 + v \neq 0$. Le domaine D est donc le complémentaire de la réunion de l'axe des ordonnées (équation $u = 0$) et de la parabole d'équation $u^2 + v = 0$ (d'axe l'axe des ordonnées, dirigée vers le bas).

(b) On veut alors calculer l'inverse en appliquant la question 3, ce qui demande bien entendu neuf calculs de déterminant de taille 2 : c'est une blague, évidemment, d'autant qu'il faut faire tous les calculs en détail. Bref, on trouve (après vérification avec un logiciel de calcul formel ; qui aurait l'idée de procéder autrement ?) :

$$\frac{1}{u(u^2 + v)} \begin{pmatrix} -v - 2u^2 & u^3 & v(u^2 + v) \\ 2u^2 + v - 1 & -u^3 & (1 - v)(u^2 + v) \\ -u & u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième partie.

1. (a) Dérivons les fonctions coordonnées de S par rapport à chacune des variables ; on obtient deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , de coordonnées :

$$\vec{u}_1 = (2u, v, 2u) \text{ et } \vec{u}_2 = (0, u, 1).$$

Pour tester leur colinéarité, on calcule leur produit vectoriel :

$$\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (v - 2u^2, -2u, 2u^2).$$

Ce vecteur s'annule si et seulement si $(u, v) = (0, 0)$. La surface S admet donc un seul point non régulier, atteint en les paramètres $(u, v) = (0, 0)$, et c'est l'origine.

(b) En un point régulier de paramètres $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$, le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan tangent à S , qui admet donc pour équation cartésienne :

$$u_0(y - u_0 v_0) + (z - u_0^2 - v_0) = 0.$$

2. (a) Faisons deux observations. Parmi les trois équations proposées, la première exprime l'appartenance de $M(u, v)$ au plan $P(u, v)$. D'autre part, les deux autres équations expriment le fait que les vecteurs dérivées partielles des fonctions coordonnées de Σ sont, pour tout (u, v) , orthogonaux au vecteur de coordonnées

$(a(u, v), b(u, v), c(u, v))$, qui est lui-même orthogonal au plan $P(u, v)$, donc elles expriment que ces vecteurs appartiennent au plan des directions de P ; conjointement, elles expriment donc (en tout cas en un point régulier de Σ), que le plan $P(u, v)$ est le plan tangent à Σ en $M(u, v)$.

Ces deux observations justifient bien l'équivalence proposée.

(b) On propose de procéder par double implication. Supposons le système S_1 satisfait. On peut alors dériver l'équation (Eq_1) par rapport à chacune des variables, en particulier par rapport à u , ce qui amène :

$$\frac{\partial a}{\partial u}(u, v)x(u, v) + a(u, v)\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial b}{\partial u}(u, v)y(u, v) + b(u, v)\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial c}{\partial u}(u, v)z(u, v) + c(u, v)\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial d}{\partial u}(u, v),$$

puis, en formant la différence de cette relation avec (Eq_2) , on en déduit (Eq_4) . En dérivant de même (Eq_1) par rapport à v , et en soustrayant (Eq_3) , on déduit (Eq_5) . Ceci justifie l'implication $(S_1) \Rightarrow (S_2)$.

L'implication réciproque se montre de même, en dérivant (Eq_1) par rapport à u et à v , et en soustrayant (Eq_4) et (Eq_5) respectivement pour retrouver (Eq_2) et (Eq_3) .

3. (a) Avec les fonctions proposées, le système (S_3) devient :

$$\begin{pmatrix} (2u^2 + v) & 1 - (2u^2 + v) & u \\ 4u & -4u & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv + u^3 \\ v + 3u^2 \\ u \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le déterminant de la partie principale :

$$D_{C_1 \leftarrow C_2 + C_1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 - (2u^2 + v) & u \\ 0 & -4u & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

en développant par rapport à la première colonne. Ce déterminant étant non nul, le système est inversible.

(b) On l'inverse par pivot de Gauss sur la matrice augmentée (en choisissant bien les pivots pour contrôler la complexité des calculs) :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2u^2 + v & 1 - (2u^2 + v) & u & uv + u^3 & & \\ 4u & -4u & 1 & v + 3u^2 & & \\ 1 & -1 & 0 & u & & \end{array} \right) \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4uL_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & u & -u^3 & & \\ 0 & 0 & 1 & v - u^2 & & \\ 1 & -1 & 0 & u & & \end{array} \right) \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - uL_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -uv & & \\ 0 & 0 & 1 & v - u^2 & & \\ 1 & -1 & 0 & u & & \end{array} \right) \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -uv & & \\ 0 & 0 & 1 & v - u^2 & & \\ 1 & 0 & 0 & u - uv & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

et l'unique solution du système est donc $(X, Y, Z) = (u - uv, -uv, v - u^2)$.

(c) Les dérivées partielles par rapport à u des fonctions coordonnées donnent le vecteur $(1 - v, -v, -2u)$, les dérivées partielles par rapport à v donnent $(-u, -u, 1)$. Le produit vectoriel de ces vecteurs a pour coordonnées $(-v - 2u^2, 2u^2 - 1 + v, -u)$: la première et la troisième coordonnée ne s'annulent simultanément qu'en $(u, v) = (0, 0)$, et la deuxième coordonnée ne s'annule pas en ce point. Ainsi, les vecteurs dérivés partiels des fonctions coordonnées sont toujours non colinéaires, ce qui justifie que tous les points sont réguliers.

4. L'objectif étant de déterminer Σ , il suffit d'après la question 2 de résoudre le système S_3 pour tout (u, v) , et on obtiendra un paramétrage de Σ . Or, ici, le système S_3 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} (uv - u) & uv & u^2 - v \\ v - 1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La partie principale est gouvernée par la matrice $A(u, v)$ de la partie II comme suggéré par l'énoncé, ce qui

permet d'écrire l'unique solution sous la forme $A(u, v)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit, après calcul, le paramétrage :

$$(u, v) \mapsto \begin{cases} x(u, v) = \frac{-uv}{u^2+v} \\ y(u, v) = \frac{u(v+1)}{u^2+v} \\ z(u, v) = \frac{-u}{u^2+v} \end{cases}$$