Corrigé ENS MPI ULM-LYON(6h) 2005

P.CHATEAUX

Partie I

1. (a) $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2f'(0)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} Tf(x) = (2k+1)f'(0)$. On prolonge donc Tf par continuité en posant $Tf(0) = (2k+1)f'(0)$.

   (b) Si d pair, $T(X^d) = dX^{d-1}$ ($T(1) = 0$). Si d impair, $T(X^d) = (2k+d)X^{d-1}$.

   (c) Par linéarité de la dérivation, T est linéaire de $C^1(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, T laisse stable l'espace $\mathbb{R}[X]$ et si P est de degré $d \geqslant 1$, alors $T(P)$ est de degré $d-1$ si d est pair ou si d est impair et $2k+d$ est non nul, et de degré $< d-1$ sinon.

   (d) On raisonne par condition nécessaire. Soit ψ une telle application. Avec la première condition, on pose $\psi(X^d) = \lambda_d X^d$, avec $\lambda_0 = 1$ (3ème condition). La deuxième condition fournit $\lambda_d = \lambda_{d-1}$ si d est pair et $\lambda_d = (1+\dfrac{2k}{d})\lambda_{d-1}$ si d est impair. Ceci détermine la suite (λ_d) de manière unique.

   On vérifie ensuite que l'endomorphisme ψ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\psi(X^d) = \lambda_d X^d$ pour tout entier naturel d vérifie les conditions demandées.

2. On observe que la restriction de T à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que sa matrice de la base $(X, \dots, X^n)$ dans la base $(1, \dots, X^{n-1})$ est diagonale, à coefficients diagonaux $(a_d)_{1\leqslant d\leqslant n}$, avec $a_d = 2k+d$ si d impair et $a_d = d$ sinon.

   Comme $T(1) = 0$ et que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R} \oplus X\mathbb{R}[X]$, $k \in M_1$ si et seulement si le noyau de T contient un polynôme non constant, i.e s'il existe n tel que T restreinte à $X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ soit non injective, i.e si la matrice diagonale précédente n'est pas inversible, i.e si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, i.e si et seulement si $\exists d \in \mathbb{N}^*,\ 2k+2d-1 = 0$.

   ψ restreinte à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice en base canonique est diagonale, à coefficients diagonaux $(\lambda_d)_{0\leqslant d\leqslant n}$. Les relations du 1 et une récurrence donnent $\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_{2d} = \lambda_{2d-1} = (1+2k)(1+\frac{2k}{3})\dots(1+\frac{2k}{2d-1})$.

   Par suite, ψ est un isomorphisme $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \psi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un isomorphisme $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \leqslant n,\ \lambda_j \neq 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n \neq 0 \iff \forall d \in \mathbb{N}^*,\ 2k+2d-1 \neq 0$.

   On en déduit que ψ est un isomorphisme si et seulement si $k \notin M_1$, et $M_1 = \{\frac{1}{2} - d/\ d \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.

Partie II

1. (a) **Remarque :** Si f est C^1, df est continue et $D_u(f)(x) = df_x(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. En particulier, $D_u(f)$ est continue.

   Pour démontrer la continuité de $\Delta_{ij}(f)$, il suffit de montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = \dfrac{f(x,y,z) - f(y,x,z)}{x-y}$ sur $U = \{(x,y,z)/\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ et $g(x,x,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x,z) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x,z)$ sur son complémentaire est continue.

   Or $f(x,y,z) - f(y,x,z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx+(1-t)y, (1-t)x+ty, z)\,dt = (x-y)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx+(1-t)y, (1-t)x+ty, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(tx+(1-t)y, (1-t)x+ty, z)\,dt$.

Par suite, l'égalité $g(x,y,z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx+(1-t)y,(1-t)x+ty,z) - \frac{\partial f}{\partial y}(tx+(1-t)y,(1-t)x+ty,z)\,dt$ est valable sur U et son complémentaire, donc sur $\mathbb{R}^n$. f étant C^1, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure.
Finalement, $T_u(f)$ est continue.
Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = d$, $D_u(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i X_1^{\alpha_1}\cdots X_i^{\alpha_i-1}\cdots X_n^{\alpha_n}$, qui appartient à $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{d-1}$.
Si $\alpha_i > \alpha_j$, $\frac{X_i^{\alpha_i}X_j^{\alpha_j} - X_i^{\alpha_j}X_j^{\alpha_i}}{X_i - X_j} = (X_iX_j)^{\alpha_j} \sum_{k=0}^{\alpha_i-\alpha_j-1} X_i^k X_j^{\alpha_i-\alpha_j-k-1}$, donc $\Delta_{ij}(X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}) = X_i^{\alpha_j}\prod_{k\neq i} X_k^{\alpha_k} \sum_{k=0}^{\alpha_i-\alpha_j-1} X_i^k X_j^{\alpha_i-\alpha_j-k-1}$, qui appartient bien à $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{d-1}$.

(b) Posant $g(y_1,\ldots,y_n) = f(y_{w'(1)},\ldots,y_{w'(n)})$, on a $(\rho_w \circ \rho_{w'})(f)(x) = \rho_w(g)(x) = g(x_{w(1)},\ldots,x_{w(n)}) = f(x_{ww'(1)},\ldots,x_{ww'(n)})$, pour tous f et x, d'où $\rho_w \circ \rho_{w'} = \rho_{ww'}$.
Posant $g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{w(1)},\ldots,x_{w(n)})$, on a $D_{e_{w(l)}}(g)(x) = \frac{\partial g}{\partial x_{w(l)}}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_l}(x_{w(1)},\ldots,x_{w(n)})$ car la variable $x_{w(l)}$ se trouve à la position l dans f, d'où $D_{e_{w(l)}}(g)(x) = \rho_w(D_{e_l}(f))(x)$, pour tous f et x, donc $\rho_w \circ D_{e_l} = D_{e_{w(l)}} \circ \rho_w$.
Remarque : Soit $U = \bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n} U_{ij}$. U est un ouvert dense dans $\mathbb{R}^n$. Pour démontrer l'égalité de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, il suffira donc de montrer qu'elles coïncident sur U.
On applique cette remarque à la dernière égalité à prouver:
$T_{e_l} = D_{e_l} + k\left(\sum_{j=l+1}^{n} \Delta_{lj} - \sum_{i=1}^{l-1} \Delta_{il}\right)$.
Soit $g = \rho_w(f)$. $(\rho_w \circ \Delta_{lj})(f) = \frac{\rho_w(f) - \rho_{w\circ(l,j)}(f)}{X_{w(l)} - X_{w(j)}} = \frac{g - \rho_{(w(l),w(j))}(g)}{X_{w(l)} - X_{w(j)}}$ car $w \circ (l,j) = (w(l),w(j)) \circ w$.
Par suite, $(\rho_w \circ T_{e_l})(f) = (\rho_w \circ D_{e_l})(f) + k\left(\sum_{j=l+1}^{n} \frac{g - \rho_{(w(l),w(j))}(g)}{X_{w(l)} - X_{w(j)}} - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{g - \rho_{(w(i),w(l))}(g)}{X_{w(i)} - X_{w(l)}}\right)$.(*)
D'autre part, $(T_{e_{w(l)}} \circ \rho_w)(f) = (D_{e_{w(l)}} \circ \rho_w)(f) + k\left(\sum_{j'=w(l)+1}^{n} \Delta_{w(l)j'}(g) - \sum_{i'=1}^{w(l)-1} \Delta_{i'w(l)}(g)\right) = (D_{e_{w(l)}} \circ \rho_w)(f) + k\left(\sum_{j'=w(l)+1}^{n} \frac{g - \rho_{(w(l),j')}(g)}{X_{w(l)} - X_{j'}} - \sum_{i'=1}^{w(l)-1} \frac{g - \rho_{(i',w(l))}(g)}{X_{i'} - X_{w(l)}}\right)$.
On procède aux changements d'indices suivants : $j' = w(j)$ et $i' = w(i)$. Si $j > l$, on retrouve le terme $\frac{g-\rho_{(w(l),w(j))}(g)}{X_{w(l)}-X_{w(j)}}$ dans la première somme de (*), sinon, on change le signe et on le retrouve dans la seconde somme de (*). Il en est de même avec le terme d'indice i obtenu. Les deux expressions ont autant de termes, et $\rho_w \circ D_{e_l} = D_{e_{w(l)}} \circ \rho_w$, donc finalement $\rho_w \circ T_{e_l} = T_{e_{w(l)}} \circ \rho_w$.

2. On démontre les 3 égalités dans U.

   (a) On observe d'abord que $D_{e_1} \circ \rho_{(1,2)} = \rho_{(1,2)} \circ D_{e_2}$.
   $[D_{e_1} + D_{e_2}, \Delta_{12}](f) = D_{e_1}\frac{f - \rho_{(1,2)}(f)}{X_1 - X_2} + D_{e_2}\frac{f - \rho_{(1,2)}(f)}{X_1 - X_2} - \Delta_{12}(D_{e_1}(f)) - \Delta_{12}(D_{e_2}(f)) = \frac{D_{e_1}(f) - D_{e_1}(\rho_{(1,2)}(f)) + D_{e_2}(f) - D_{e_2}(\rho_{(1,2)}(f)) - D_{e_1}(f) + \rho_{(1,2)}(D_{e_1}(f)) - D_{e_2}(f) + \rho_{(1,2)}(D_{e_2}(f))}{X_1 - X_2}$
   car les termes en $\frac{1}{(X_1 - X_2)^2}$ s'éliminent. Par suite, $[D_{e_1} + D_{e_2}, \Delta_{12}] = 0$.

   (b) $[\Delta_{1i}, \Delta_{2i}](f) = \frac{\Delta_{2i}(f) - \rho_{(1,i)}\Delta_{2i}(f)}{X_1 - X_i} - \frac{\Delta_{1i}(f) - \rho_{(2,i)}\Delta_{1i}(f)}{X_2 - X_i}$

$= \dfrac{f-\rho_{(2,i)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)} - \dfrac{\rho_{(1,i)}(f)-\rho_{(1,i,2)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)} - \dfrac{f-\rho_{(1,i)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)} + \dfrac{\rho_{(2,i)}(f)-\rho_{(2,i,1)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)} = \dfrac{\rho_{(1,i,2)}(f)-\rho_{(1,2,i)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)}$.

$[\Delta_{1i},\Delta_{21}](f) = \dfrac{\Delta_{21}(f)-\rho_{(1,i)}\Delta_{21}(f)}{X_1-X_i} - \dfrac{\Delta_{1i}(f)-\rho_{(2,1)}\Delta_{1i}(f)}{X_2-X_1} = \dfrac{f-\rho_{(2,1)}(f)-\rho_{(1,i)}(f)+\rho_{(i,1,2)}(f)-f+\rho_{(1,i)}(f)+\rho_{(2,1)}(f)-\rho_{(2,1,i)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_1)} = \dfrac{\rho_{(1,2,i)}(f)-\rho_{(1,i,2)}(f)}{(X_1-X_i)(X_2-X_1)}$.

$[\Delta_{12},\Delta_{2i}](f) = \dfrac{\Delta_{2i}(f)-\rho_{(1,2)}\Delta_{2i}(f)}{X_1-X_2} - \dfrac{\Delta_{12}(f)-\rho_{(2,i)}\Delta_{12}(f)}{X_2-X_i}$
$= \dfrac{f-\rho_{(2,i)}(f)-\rho_{(1,2)}(f)+\rho_{(1,2,i)}(f)-f+\rho_{(1,2)}(f)+\rho_{(2,i)}(f)-\rho_{(i,2,1)}(f)}{(X_1-X_2)(X_2-X_i)} = \dfrac{\rho_{(1,2,i)}(f)-\rho_{(1,i,2)}(f)}{(X_1-X_2)(X_2-X_i)}$.

En ajoutant les 3, on obtient :

$\big(\rho_{(1,i,2)}(f)-\rho_{(1,2,i)}(f)\big)\left(\dfrac{1}{(X_1-X_i)(X_2-X_i)} - \dfrac{1}{(X_1-X_i)(X_2-X_1)} - \dfrac{1}{(X_1-X_2)(X_2-X_i)}\right) = \big(\rho_{(1,i,2)}(f)-\rho_{(1,2,i)}(f)\big)\left(\dfrac{X_1-X_2+X_2-X_i-X_1+X_i}{(X_1-X_i)(X_1-X_2)(X_2-X_i)}\right) = 0.$

(c) D_{e_i} et D_{e_j} commutent en vertu du théorème de Schwarz (applicable car les polynômes sont C^2). L'application $(u,u') \mapsto D_u \circ D_{u'}$ étant bilinéaire, on en déduit en décomposant u et u' dans la base canonique que D_u et $D_{u'}$ commutent.

Le crochet de Lie étant également bilinéaire, il suffit pour prouver la dernière égalité que T_{e_1} et T_{e_2} commutent (la méthode étant similaire pour T_{e_i} et T_{e_j}).

$T_{e_1} = D_{e_1} + k\Delta_{12} + k\displaystyle\sum_{i=3}^n \Delta_{1i}$ et $T_{e_2} = D_{e_2} - k\Delta_{12} + \displaystyle\sum_{j=3}^n \Delta_{2j}$.

$[T_{e_1},T_{e_2}] = [D_{e_1},D_{e_2}] - k[D_{e_1},\Delta_{12}] + k[\Delta_{12},D_{e_2}] + k\displaystyle\sum_{i=3}^n[\Delta_{1i},D_{e_2}] + k\sum_{j=3}^n[D_{e_1},\Delta_{2j}] - k^2\sum_{i=3}^n[\Delta_{1i},\Delta_{12}] + k^2\sum_{j=3}^n[\Delta_{12},\Delta_{2j}] + k^2\sum_{3\leqslant i,j\leqslant n}[\Delta_{1i},\Delta_{2j}]$.

On remarque que $[D_{e_1},D_{e_2}]=0$ et $-[D_{e_1},\Delta_{12}]+[\Delta_{12},D_{e_2}]=0$ d'après 2a.

Par théorème de Schwarz, si i, j, k, l sont deux à deux distincts, $[\Delta_{ij},\Delta_{kl}]=0$ et $[D_{e_i},\Delta_{jk}]=0$.

Enfin, $\Delta_{21}=-\Delta_{12}$.

Il reste finalement $[T_{e_1},T_{e_2}] = k^2\displaystyle\sum_{i=3}^n[\Delta_{1i},\Delta_{21}]+[\Delta_{12},\Delta_{2i}]+[\Delta_{1i},\Delta_{2i}] = 0$ d'après (b).

Partie III

1. (a) On écrit $P = \sum\limits_{k=0}^d a_k X_1^k X_2^{d-k}$, de sorte que $\tilde{P}(\theta) = \sum\limits_{k=0}^d a_k(\cos\theta)^k(\sin\theta)^{d-k}$.

On pose alors $t = \tan\frac{\theta}{2}$ qui décrit bijectivement $\mathbb{R}$ lorsque θ décrit $]-\pi,\pi[$.

$\tilde{P}(\theta) = \dfrac{1}{(1+t^2)^d}\displaystyle\sum_{k=0}^d a_k(1-t^2)^k(2t)^{d-k} = \dfrac{Q(t)}{(1+t^2)^d}$, où Q est un polynôme réel.

Si $a_d \neq 0$, Q est de degré $2d$ donc possède au plus $2d$ racines, et $\tilde{P}(\theta) = a_d(-1)^d \neq 0$.

Si $a_d = 0$, Q est de degré $\leqslant 2d-1$ donc possède au plus $2d-1$ racines, et $\tilde{P}(\pi)=0$.

Dans les deux cas, $\tilde{P}$ admet au plus $2d$ zéros dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

(b) On prouve par récurrence sur d qu'il existe $P_d \in \mathbb{R}[X_1,X_2]_d$ tel que $\forall\theta,\ P_d(\cos\theta,\sin\theta) = \cos(d\theta)$. On initialise avec $P_1 = X_1$ et $P_2 = X_1^2 - X_2^2$. Si c'est vrai jusqu'au rang d, on écrit que $\cos(d+1)\theta = 2\cos d\theta\cos\theta - \cos(d-1)\theta$ et il suffit alors de poser $P_{d+1} = 2X_1P_d - (X_1^2+X_2^2)P_{d-1}$, le terme en $X_1^2+X_2^2$ valant 1 en $(\cos\theta,\sin\theta)$ et garantissant l'homogénéité de degré $d+1$.

$\tilde{P}(\theta-\beta) = P(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta, \sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta)$, donc en posant $R = P(X_1\cos\beta + X_2\sin\beta, X_1\sin\beta+X_2\cos\beta)$, on a bien $R \in \mathbb{R}[X_1,X_2]_d$ et $\forall\theta,\ R(\cos\theta,\sin\theta) = \tilde{P}(\theta-\beta)$.

Le polynôme $A = P_d + R$ appartient à $\mathbb{R}[X_1,X_2]_d$ et vérifie $\forall\theta,\ Q(\theta) = A(\cos\theta,\sin\theta)$.

Pour tout entier k, $Q(\frac{2k\pi}{d}) = 1 + \tilde{P}(\frac{2k\pi}{d} - \beta) > 0$ et $Q(\frac{(2k+1)\pi}{d}) = -1 + \tilde{P}(\frac{(2k+1)\pi}{d} - \beta) < 0$. En appliquant la question (a), on en déduit que Q s'annule une et une seule fois sur chaque intervalle ouvert $]\frac{k\pi}{d}, \frac{(k+1)\pi}{d}[$. Q' s'annule une fois de moins que Q sur une période, donc garde un signe constant sur chaque intervalle $]\frac{k\pi}{d}, \frac{(k+1)\pi}{d}[$. Comme $\beta \in]0, \frac{\pi}{d}[$, on obtient $Q'(\beta) \leqslant 0$, soit $\tilde{P}'(0) \leqslant d\sqrt{1 - \tilde{P}(0)^2}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme précédemment, il existe $A_\varepsilon \in \mathbb{R}[X_1, X_2]_d$ tel que $\forall t,\ A_\varepsilon(\cos t, \sin t) = \dfrac{P(\cos(t+\theta), \sin(t+\theta))}{\|P\| + \varepsilon}$, i.e $\tilde{A}_\varepsilon(t) = \dfrac{\tilde{P}(t+\theta)}{\|P\| + \varepsilon}$. On a bien $|\tilde{A}_\varepsilon(t)| < 1$ pour tout t, donc par la question b, $\tilde{A}'_\varepsilon(0) \leqslant d\sqrt{1 - \tilde{A}_\varepsilon(0)^2}$, i.e $\tilde{P}'(\theta)^2 + d^2\tilde{P}(\theta)^2 \leqslant d^2(\|P\| + \varepsilon)^2$. Il reste à faire tendre ε vers 0 pour conclure.

(d) $P(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^d P(\cos\theta, \sin\theta)$. On dérive par rapport à r, puis on prend $r = 1$, ce qui donne : $\cos\theta D_{e_1}(P)(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta D_{e_2}(P)(\cos\theta, \sin\theta) = dP(\cos\theta, \sin\theta)$ D'autre part, $\tilde{P}'(\theta) = -\sin\theta D_{e_1}(P)(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta D_{e_2}(P)(\cos\theta, \sin\theta)$.
On élève les deux relations au carré et en utilisant l'inégalité du (c), on en déduit en posant $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ que $D_{e_1}(P)(x)^2 + D_{e_2}(P)(x)^2 \leqslant d^2\|P\|^2$.
Si $u \in S$, $|D_u(P)(x)| = |u_1 D_{e_1}(P)(x) + u_2 D_{e_2}(P)(x)| \leqslant \|u\|\sqrt{D_{e_1}(P)(x)^2 + D_{e_2}(P)(x)^2}$ par Cauchy-Schwarz, d'où $|D_u(P)(x)| \leqslant d\|P\|$ pour tous x et u dans S. Par passage au sup, on en déduit que $\|P\|_1 \leqslant \|P\|$.

2. (a) Il s'agit (encore) de l'identité d'Euler. On part de $P(tX_1, \ldots, tX_n) = t^d P(X_1, \ldots, X_n)$. On dérive par rapport à t : $\sum_{i=1}^{n} X_i D_{e_i}(P)(tX_1, \ldots, tX_n) = dt^{d-1}P(X_1, \ldots, X_n)$, puis on prend $t = 1$ pour aboutir à $\sum_{i=1}^{n} X_i D_{e_i}(P) = dP$.

(b) D'après ce qui précède, $dP(x) = D_x P(x)$, donc $|dP(x)| \leqslant \sup_{u,y \in S} |D_u P(y)| = d\|P\|_1$. En passant au sup lorsque x décrit S, on obtient $\|P\| \leqslant \|P\|_1$. En généralisant la question 1, on obtient l'inégalité inverse $\|P\|_1 \leqslant \|P\|$.

(c) On procède par récurrence sur d, le cas $d = 1$ étant évident.
On suppose l'égalité vraie au rang $d-1$, et on se donne $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$. Pour tout $u \in S$, $D_u(P) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{d-1}$, donc $\|D_u(P)\|_D = \|D_u(P)\|_1 = \|D_u(P)\|$ d'après b. Or $\|P\|_D = \dfrac{1}{d}\sup_{u \in S}\|D_u(P)\|_D$, d'où $\|P\|_D = \dfrac{1}{d}\sup_{u \in S}\|D_u(P)\| = \|P\|_1$.

Partie IV

On remarque que $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$, chaque sous-espace $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d$ étant de dimension finie (égale à $\binom{n+d-1}{d}$).

1. (a) $\phi \circ \rho_w = \sum_{i<j} \rho_{(ij)\circ w} = \sum_{i<j} \rho_{w \circ (w(i)w(j))} = \rho_w \circ \sum_{i<j} \rho_{(w(i)w(j))} = \rho_w \circ \phi$ car $(w(i)w(j))$ décrit les transpositions de S_n quand (ij) les décrit.

(b) Soit λ un élément de L_d et E_λ l'espace propre associé. D'après (a), les applications $\rho_{(ij)}$ laissent stable E_λ, donc $\operatorname{tr}(\phi|_{E_\lambda}) = \sum_{i<j} \operatorname{tr}(\rho_{(ij)}|_{E_\lambda})$. $\rho_{(ij)}$ est involutive, donc ses valeurs propres sont -1 ou 1. La trace de sa restriction à E_λ est la somme de ses valeurs propres, i.e un entier n_{ij} compris entre $-\dim E_\lambda$ et $\dim E_\lambda$. Comme $\operatorname{tr}(\phi|_{E_\lambda}) = \lambda \dim E_\lambda$, on en déduit que $\lambda \dim E_\lambda = \sum_{i<j} n_{ij}$, donc $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $|\lambda| \leqslant \frac{1}{\dim E_\lambda} \sum_{i<j} |n_{ij}|$, d'où $|\lambda| \leqslant N$.

(c) Soit $(a_w)_{w \in S_n}$ une famille de réels telle que $\sum_{w \in S_n} a_w \rho_w = 0$. On applique cette égalité au polynôme $P = \prod_{i=1}^n X_i^i$. $\rho_w(P) = \prod_{i=1}^n X_i^{w(i)}$. Si $w \neq w'$, les n-uplets $(w(1), \ldots, w(n))$ et $(w'(1), \ldots, w'(n))$ sont distincts, donc la famille $(\rho_w(P))_{w \in S_n}$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, donc les coefficients a_w sont tous nuls, ce qui prouve que la famille $(\rho_w)_{w \in S_n}$ est libre.
On note Γ =Vect$\{\rho_w /\ w \in S_n\}$. $id \in \Gamma$ et $\forall w, w',\ \rho_w \rho_{w'} = \rho_{ww'} \in \Gamma$, donc par bilinéarité Γ est stable pour la loi $\circ$ et est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n])$.

(d)

2. (a) $T_{e_i} = D_{e_i} + k\left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} \Delta_{ij} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \Delta_{ji}\right)$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=i+1}^{n} \Delta_{ij}(P) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i \frac{P-\rho_{ij}(P)}{X_i - X_j}$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{ji}(P) = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} X_i \frac{P-\rho_{ji}(P)}{X_j - X_i} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_j \frac{P-\rho_{ij}(P)}{X_i - X_j}$ en échangeant les rôles de i et j.

La différence des deux sommes est donc égale à $\displaystyle\sum_{i<j} P - \rho_{ij}(P) = NP - \phi(P)$.

Par conséquent, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i T_{e_i}(P) = dP + k(NP - \phi(P)) = (d+kN)P - k\phi(P) = \gamma_d(P)$.

(b) Si $k \in M$, il existe P non constant tel que $T_{e_i}(P) = 0$ pour tout i.

On écrit $P = \sum\limits_{j=0}^{d} P_j$ avec $P_j \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_j$ pour tout j, et P_d non nul. $T_{e_i}(P) = \sum\limits_{j=0}^{d} T_{e_i}(P_j)$ avec $T_{e_i}(P_j) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_{j-1}$. On en déduit que $T_{e_i}(P_d) = 0$ pour tout i, donc $\gamma_d(P_d) = 0$, donc $\dfrac{d+kN}{k} \in L_d$, i.e $\exists \lambda \in L,\ k = \dfrac{d}{\lambda - N}$.

3. (a) $\dfrac{d+kN}{k} > N$, donc n'appartient pas à aucun L_j d'après 1b. γ_d restreinte à $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_j$ est un endomorphisme injectif, donc bijectif. Ceci étant vrai pour tout entier j, γ_d est bien inversible dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

(b) Soit $\mathcal{I}_d$ l'ensemble des n-uplets d'entiers naturels de somme d classés en ordre décroissant. Si $I \in \mathcal{I}$, soit N_I l'ensemble des n-uplets égaux à I une fois classé en ordre décroissant et $E_I =$Vect $(X^\alpha /\ \alpha \in N_I)$.

Par exemple, pour $n = 3$ et $d = 2$, $\mathcal{I}_2 = \{(2,0,0), (1,1,0)\}$, $E_{(2,0,0)} =$Vect(X_1^2, X_2^2, X_3^2), $E_{(1,1,0)} =$Vect(X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3).

Un calcul simple montre que $\phi(X^\alpha)$ est de la forme $\sum\limits_{\beta \in N_I} n_{\alpha\beta} X^\beta$, avec $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{N}$, et $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}$.

$\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]_d = \displaystyle\bigoplus_{I \in \mathcal{I}_d} E_I$, donc la matrice de $\phi|_{\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_d}$ dans la base canonique associée à cette somme directe est symétrique réelle, par suite $\phi|_{\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_d}$ est diagonalisable.

De plus, ϕ admet un nombre fini de valeurs propres donc la somme directe de ses espaces propres est égale à $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (en prenant la somme directe des restrictions quand d décrit $\mathbb{N}$) , donc il existe un polynôme non nul annulant ϕ (en l'occurrence $\prod_{\lambda \in L}(X - \lambda)$), donc également un polynôme non nul annulant γ_d. γ_d étant inversible admet alors un polynôme annulateur de valuation nulle, i.e $\exists (a_j)_{0\leqslant j\leqslant q}$ réels, $\sum\limits_{j=0}^{q} a_j \gamma_d^j = 0$ avec $a_0 \neq 0$. Par suite, $\gamma_d^{-1} = -\sum\limits_{j=1}^{q} \frac{a_j}{a_0} \gamma_d^{j-1}$. Or $\gamma_d \in \Gamma$ qui est une algèbre, donc $\gamma_d^{-1} \in \Gamma$. $(\rho_w)_{w \in S_n}$ étant une base de Γ, il existe une unique famille $(c_d(w))_{w \in S_n}$ de réels telle que $\gamma_d^{-1} = \sum\limits_{w \in S_n} c_d(w) \rho_w$.

(c) On applique la question 2a à P et on compose par γ_d^{-1} :

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_d^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i T_{e_i}(P)\Big)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{w \in S_n} c_d(w) \sum_{i=1}^{n} \left(X_i T_{e_i}(P)\right)(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)}).$$

(d) On choisit $P = X_1^d + \cdots + X_n^d$ et $(x_1, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1)$.

On remarque que $\Delta_{ij}(P)(1, \ldots, 1) = 0$ pour i et j distincts, donc $T_{e_i}(P)(1, \ldots, 1) = D_{e_i}(P)(1, \ldots, 1) = d$.

En appliquant (c), il vient $n = \sum_{w \in S_n} c_d(w) \sum\limits_{i=1}^{n} d$, soit $\sum\limits_{w \in S_n} c_d(w) = \frac{1}{d}$.

(e) Faute de mieux, on écrit $\gamma_d\gamma_d^{-1} = id$, soit $\sum\limits_{w\in S_n} (d+kN)c_d(w)\rho_w - k \sum\limits_{w\in S_n,(ij)} c_d(w)\rho_{w\circ(ij)} = id$,

i.e $\sum\limits_{w\in S_n} \left((d+kN)c_d(w) - k \sum\limits_{i<j} c_d(w\circ(ij)) \right) \rho_w = id.$

La famille (ρ_w) étant libre, $(d+kN)c_d(id) = k \sum\limits_{i<j} c_d(ij) + 1$ et

$\forall w \neq id,\ (d+kN)c_d(w) = k \sum\limits_{i<j} c_d(w\circ(ij)).$

Par symétrie, $c_d(w)$ ne dépend que des longueurs des cycles constituant w, ce qui permet par récurrence de montrer la positivité cherchée.

Partie V

1. (a) L'unicité est claire car si P et Q conviennent, $P-Q$ a toutes ses dérivées partielles nulles, donc est constant, or il appartient à $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d+1}$, donc il est nul.

Pour l'existence, on procède par récurrence sur n. Le cas $n=1$ se traite en partant de $P_1 = \alpha X_1^d$ et en choisissant $P = \alpha \dfrac{X_1^{d+1}}{d+1}$.

Si l'existence est vraie au rang $n-1$, on part de $P_1,\dots,P_n$ ad hoc. La condition $D_{e_1}(P) = P_1$ impose que P s'écrive sous la forme $P(x) = \int\limits_0^{x_1} P_1(t,x')\,dt + Q(x')$, avec $x' = (x_2,\dots,x_n)$.

Dés lors, $D_{e_i}(P)(x) = \int\limits_0^{x_1} D_{e_i}(P_1)(t,x')\,dt + D_{e_i}(Q)(x')$ (dérivation sous le signe intégral), d'où $D_{e_i}(P)(x) = \int\limits_0^{x_1} D_{e_1}(P_i)(t,x')\,dt + D_{e_i}(Q)(x') = P_i(x) - P_i(0,x') + D_{e_i}(Q)(x')$. On recherche donc $Q \in \mathbb{R}[X_2,\dots,X_n]_{d+1}$ tel que $\forall i \geqslant 2,\ D_{e_i}(Q) = P_i(0,X')$, ce qui est possible en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'ordre $n-1$ puisque pour tous i et $j \geqslant 2$, $D_{e_i}P_j(0,X') = D_{e_j}P_i(0,X')$. Comme le polynôme $\int\limits_0^{X_1} P_1(t,X')\,dt$ appartient à $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d+1}$, le polynôme P proposé convient.

(b) On procède par récurrence sur d pour montrer que la restriction de ψ à $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d$ est définie de manière unique. $\psi(1)=1$ montre que c'est vrai pour $d=0$.

Si ψ est déterminée ad hoc de façon unique sur $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d-1}$, on se donne $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d$. Puisque $T_{e_i}(P) \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d-1}$, $P_i = \psi(T_{e_i}(P))$ est défini de manière unique pour tout i. $D_{e_i}(P_j) = (D_{e_i}\circ\psi)(T_{e_j}(P)) = (\psi\circ T_{e_i}\circ T_{e_j})(P) = (\psi\circ T_{e_j}\circ T_{e_i})(P) = D_{e_j}(P_i)$ pour tous i et j, donc par 1 a, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d$ tel que pour tout i, $\psi(T_{e_i}(P)) = D_{e_i}(Q)$, donc par linéarité $\psi(T_u(P)) = D_u(Q)$. On pose alors $\psi(P) = Q$, l'unicité et la linéarité de ψ sur $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d$ étant immédiates.

ψ est donc déterminée de façon unique sur $\bigoplus\limits_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d = \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$.

(c) On suppose que $k \in M$: il existe $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ non constant tel que $\forall i,\ T_{e_i}(P) = 0$.

On écrit $P = \sum\limits_{j=0}^{d} P_j$ avec $P_j \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_j$ pour tout j, et $P_d \neq 0$.

$T_{e_i}(P) = \sum\limits_{j=0}^{d} T_{e_i}(P_j)$, donc $T_{e_i}(P_d) = 0$ pour tout i. D'après (b), $D_{e_i}(\psi(P_d)) = 0$ pour tout i, donc $\psi(P_d)$ est constant, or $\psi(P_d) \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d-1}$, donc $\psi(P_d) = 0$. ψ n'est pas un isomorphisme.

On suppose que ψ n'est pas un isomorphisme, i.e $\exists d \in \mathbb{N},\ \psi|_{\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d}$ non injective. On choisit d minimal ainsi ($d \geqslant 1$ car $\psi(1)=1$). $\exists P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_d$ tel que $\psi(P)=0$. D'après (b), $\psi(T_{e_i}(P)) = 0$ pour tout i, or $T_{e_i}(P) \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]_{d-1}$ donc par minimalité de d, $T_{e_i}(P) = 0$ pour tout i, d'où $k \in M$.

2. (a) On procède par récurrence sur d.

Si $d=1$, pour $P = \sum\limits_{i=1}^{n} a_iX_i$, $\Delta_{ij}(P) = a_i - a_j$ et $D_{e_i}(P) = a_i$, donc $T_u(P)$ est le polynôme constant $\sum\limits_{i=1}^{n} u_ia_i + k\sum\limits_{i<j}(u_i-u_j)(a_i-a_j)$.

D'autre part, $\|P\| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$ par égalité dans Cauchy-Schwarz, et lorsque $u_i = \frac{a_i}{\|a\|}$, on obtient $T_u(P) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$ puisque $k \geqslant 0$. Par conséquent, $\|P\| \leqslant \|P\|_T$.

Si la propriété est vraie au rang $d-1$, on part de l'expression de $P(x)$ du IV 3c et en utilisant la positivité des $c_d(w)$, on a $\forall x \in S,\ |P(x)| \leqslant \sum_{w \in S_n} c_d(w) \sum_{i=1}^n |X_i T_{e_i}(P)(x_{w(1)}, \dots, x_{w(n)})|$. Or $T_{e_i}(P) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{d-1}$, d'où $|P(x)| \leqslant \sum_{w \in S_n} c_d(w) \sum_{i=1}^n \frac{|x_{w(i)}|}{(d-1)!} \sup_{u_1,\dots,u_{d-1},y \in S} |T_{u_1} \dots T_{u_{d-1}} T_{e_i}(P)(y)|$. En posant $Q = T_{u_1} \dots T_{u_{d-1}}(P)$, $T_u(Q) = \sum_{i=1}^n u_i T_{e_i}(Q)$, donc $\sum_{i=1}^n |x_{w(i)}||T_{e_i}(Q)(y)| \leqslant \sup_{u,y \in S} |T_u(Q)(y)|$, d'où puisque les T_u commutent entre eux, $|P(x)| \leqslant \frac{1}{(d-1)!} \sup_{u_1,\dots,u_d,y \in S} |T_{u_1} \dots T_{u_d}(P)(y)| \sum_{w \in S_n} c_d(w) = \|P\|_T$ d'après IV 3d. En passant au sup quand x décrit S, il vient $\|P\| \leqslant \|P\|_T$.

(b) $T_u \chi = \chi D_u$, donc en itérant $T_{u_1} \dots T_{u_d} \chi(P)(x) = \chi D_{u_1} \dots D_{u_d}(P)(x)$. Or $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$, donc $D_{u_1} \dots D_{u_d}(P)$ est un polynôme constant en x, de plus $\chi(1) = 1$, donc $T_{u_1} \dots T_{u_d} \chi(P)(x) = D_{u_1} \dots D_{u_d}(P)(x)$. En passant à la borne supérieure, on obtient bien $\|\chi(P)\|_T = \|P\|_D$.

(c) Pour $d = 0$, le résultat est clair car $\chi(1) = 1$.
Pour $d \geqslant 1$, $\chi(P) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_d$, donc par le (a), $\|\chi(P)\| \leqslant \|\chi(P)\|_T$, et par le (b), $\|\chi(P)\| \leqslant \|P\|_D$. Or $\|P\|_D = \|P\|_1 = \|P\|$ d'après III 2, d'où finalement $\|\chi(P)\| \leqslant \|P\|$.

Partie VI

1. (a) $\forall x \in B \setminus \{0\},\ |f_d(x)| = \|x\|^d |f_d(\frac{x}{\|x\|})| \leqslant \|f_d\|$, encore vrai en 0 par continuité, donc $\sum f_d$ converge normalement, donc uniformément et absolument, sur B. D'après III, $\|D_{e_i}(f_d)\| \leqslant d\|f_d\|_1 = d\|f_d\|$, et $D_{e_i}(f_d) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]_{d-1}$, donc en appliquant le résultat précédent, les séries $\sum D_{e_i}(f_d)$ convergent normalement sur B pour tout i, donc f est C^1 sur B° et $\forall u,\ D_u(f) = \sum_{d \in \mathbb{N}} D_u(f_d)$.
Une récurrence aisée entraine de même que f est C^∞ sur B°.

   (b) On procède par récurrence sur d. $f_0 = f(0) = 0$.
Si $f_j = 0$ pour tout $j \leqslant d-1$, on a $0 = \sum_{j=d}^\infty f_j$. On applique cette relation en rx pour $r \in]0,1]$ et $x \in B^\circ$: $0 = \sum_{j=d}^\infty r^j f_j(x)$, soit $\sum_{j=d}^\infty r^{j-d} f_j(x) = 0$. Cette série de fonctions de la variable r converge normalement sur $]0,1]$ (car $\sum \|f_d\|$ converge), donc en faisant tendre r vers 0, il vient $f_d(x) = 0$ pour tout $x \in B^\circ$, ce qui achève la récurrence.

2. On observe que si $f \in H$, les composantes d-homogènes définissant f sont déterminées de manière unique grâce à la question 1b.

   (a) La fonction constante 1 appartient à H et $\|1\| = 1$.
Soient $f = \sum_{d \geqslant 0} f_d$ et $g = \sum_{d \geqslant 0} g_d$ éléments de H.
Si $\|f\| = 0$, alors $\forall d \geqslant 0,\ \|f_d\| = 0$, i.e $f_d = 0$, donc $f = 0$.
$f_d + g_d$ est d-homogène et $\|f_d + g_d\| \leqslant \|f_d\| + \|g_d\|$, donc $f + g = \sum_{d \geqslant 0} f_d + g_d \in H$ et $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, αf_d est d-homogène et $\|\alpha f_d\| = |\alpha|\|f_d\|$, donc $\alpha f = \sum_{d \geqslant 0} \alpha f_d \in H$ et $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.
Soit $h_d = \sum_{j=0}^d f_j g_{d-j}$. h_d est d-homogène et $\|h_d\| \leqslant \sum_{j=0}^d \|f_j\|\|g_{d-j}\|$, donc $\sum \|h_d\|$ converge en tant que produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, et $h = \sum_{d \geqslant 0} h_d = \left(\sum_{d \geqslant 0} f_d\right)\left(\sum_{d \geqslant 0} g_d\right) = fg$, donc $fg \in H$. En outre, $\|fg\| = \sum_{d \geqslant 0} \|h_d\| \leqslant \sum_{d \geqslant 0} \left(\sum_{j=0}^d \|f_j\|\|g_{d-j}\|\right) =$

$\left(\sum\limits_{d\geqslant 0}\|f_d\|\right)\left(\sum\limits_{d\geqslant 0}\|g_d\|\right) = \|f\|\|g\|.$

H est donc une sous-algèbre des fonctions de B° dans $\mathbb{R}$, normée unitaire.

Soit $(f(r)) = (\sum\limits_{d\geqslant 0} f_d(r))$ une suite de Cauchy dans H. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\sum\limits_{d\geqslant 0}\|f_d(r)-f_d(s)\| \leqslant \varepsilon$ dés que r et s sont supérieurs à un certain indice r_0. En particulier, pour tout $d \geqslant 0$, $\|f_d(r)-f_d(s)\| \leqslant \varepsilon$, donc la suite $(f_d(r))_r$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_d$ qui est complet (sous-espace de dimension finie) donc converge vers un élément noté f_d.

On écrit $\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{d=0}^{m}\|f_d(r)-f_d(s)\| \leqslant \varepsilon$, puis on fait tendre s vers $+\infty$, ce qui donne $\sum\limits_{d=0}^{m}\|f_d(r)-f_d\| \leqslant \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout m, on obtient que $\sum\limits_{d}\|f_d\|$ converge et en posant $f = \sum\limits_{d\geqslant 0} f_d$, on conclut que $f \in H$ et $\sum\limits_{d\geqslant 0}\|f_d(r)-f_d\| \leqslant \varepsilon$, i.e $\|f_d - f\| \leqslant \varepsilon$ dés que $r \geqslant r_0$, ce qui prouve que (f_d) converge vers f dans H. Par suite H est complet.

(b) $\chi(f_d)$ est d-homogène et $\|\chi(f_d)\| \leqslant \|f_d\|$, donc $\sum\|\chi(f_d)\|$ converge, donc $\chi(f) \in H$. La linéarité de χ s'étend de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ à H, et $\|\chi(f)\| = \sum\limits_{d=0}^{\infty}\|\chi(f_d)\| \leqslant \sum\limits_{d=0}^{\infty}\|f_d\| = \|f\|$, d'où la continuité de χ sur H.

3. (a) **Existence** : $P = \sum\limits_{i=1}^{n} y_iX_i$ est 1-homogène, donc $f_d = \frac{P^d}{d!}$ est d-homogène. On pose $A = \sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|$, de sorte que $\|f_d\| \leqslant \frac{A^d}{d!}$, donc $\sum\|f_d\|$ converge, et $\exp P = \sum\limits_{d=0}^{\infty} f_d \in H$, d'où $E_y \in H$.
Par dérivation terme à terme (cf 1a), $T_{e_i}(E_y) = \sum\limits_{d\geqslant 0}(T_{e_i}\circ\chi)(f_d) = \sum\limits_{d\geqslant 0}(\chi\circ D_{e_i})(f_d)$ d'après V.1b, or $D_{e_i}(f_d) = y_if_{d-1}$ et $D_{e_i}(f_0) = 0$, d'où $T_{e_i}(E_y) = y_i\sum\limits_{d\geqslant 1} f_{d-1} = y_iE_y$.

Enfin, $E_y(0) = \chi(f_0)(0) = 1$ d'après V.1b.
Unicité : Soient f et g deux solutions. On pose $h = f - g$ qui vérifie $h(0) = 0$ et pour tout i, $T_{e_i}(h) = y_ih$. On écrit donc $h = \sum\limits_{d\geqslant 1} h_d$. $\forall i$, $T_{e_i}(h) = \sum\limits_{d\geqslant 1} T_{e_i}(h_d)$, avec $T_{e_i}(h_d) \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]_{d-1}$, donc $\forall i$, $\forall d \geqslant 1$, $T_{e_i}(h_d) = y_ih_{d-1}$.
On en déduit $T_{e_i}(h_1) = 0$ pour tout i. Or $k \geqslant 0$, donc d'après IV.3c, $k \notin M$, donc $h_1 = 0$, et on poursuit ainsi en cascade ($T_{e_i}(h_2) = 0...$) pour montrer que tous les h_d sont nuls, donc $f = g$.

(b) Etudier $\exp\sum\limits_{i=1}^{n} y_iX_i$ sur B_R° revient à étudier $\exp\sum\limits_{i=1}^{n} Ry_iX_i$ sur B° qui vérifie $T_{e_i}(E_{Ry}) = Ry_iE_{Ry}$, mais d'autre part $T_{e_i}(E_{Ry}) = RT_{e_i}(E_y)$ donc E_y s'étend en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant encore $T_{e_i}(f) = y_if$ pour tout i.

4. On prend $n = 2$. Le système (1) s'écrit $g(0) = 1$ et

$$D_{e_1}(g)(x_1,x_2) + k\frac{g(x_1,x_2)-g(x_2,x_1)}{x_1-x_2} = y_1g(x_1,x_2)$$
$$D_{e_2}(g)(x_1,x_2) - k\frac{g(x_1,x_2)-g(x_2,x_1)}{x_1-x_2} = y_2g(x_1,x_2)$$

Si on cherche les solutions du système dans lequel $y_1 = -y_2 = \lambda$ sous la forme $g(x_1,x_2) = f(x_1-x_2)$ où f est C^1 sur $\mathbb{R}$, on obtient les relations $f(0) = 1$ et $\forall x$, $f'(x)+k\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \lambda f(x)$ i.e $T(f) = \lambda f$.
On a trouvé $E_y = \chi(\exp y_1X_1 + y_2X_2) = \chi(\exp\lambda(X_1-X_2))$. Le calcul récursif de ψ donc de χ présenté au V.1b permettrait d'en déduire $f(x) = \chi(\exp\lambda(X_1-X_2))|_{(X_1-X_2=x)}$, i.e d'obtenir les vecteurs propres de T.