Mines PSI 2025 2 - Un corrigé

Partie I. Linéarisation de (E)

1 $\triangleright$ ► $u' + u + 1 = \frac{1}{2}(1+u)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants résolue sur $\mathbf{R}$ donc le problème de Cauchy (C_ℓ) admet une unique solution.
► $u' + u + 1 = \frac{1}{2}(1+u)$ est équivalent à $u' + \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}$ dont une solution particulière est la fonction constante égale à -1 et les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ où λ décrit $\mathbf{R}$ puisque $\int -\frac{1}{2}dx = -\frac{1}{2}x$.
On en déduit, en notant u l'unique solution du problème de Cauchy qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $u(x) = \lambda e^{-\frac{1}{2}x} - 1$. Mais $u(0) = 0$ donc $\lambda - 1 = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 1}$$

► La décroissance de u sur $\mathbf{R}_+$ est évidente, $u(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} u = -1$ donc on a le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	-1

2 $\triangleright$ ► Soit $\gamma \in \mathbf{R}$. La fonction constante égale à γ est solution de (E_ℓ) ssi $\gamma' + \gamma + 1 = \frac{1}{2}(1+\gamma)$ ssi $0 + \gamma + 1 = \frac{1}{2}(1+\gamma)$ ssi $\gamma = -1$:

$$\boxed{\text{l'unique solution constante de } (E_\ell) \text{ est } -1}$$

► La question précédente montre que l'on a bien

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma}$$

3 $\triangleright$ ► y est solution de (E) donc $y' + y + 1 = \frac{1}{2}e^y$ donc $y' = \frac{1}{2}e^y - y - 1$. Comme $\lim\limits_{+\infty} y = c$, on a $\lim\limits_{+\infty} y' = \frac{1}{2}e^c - c - 1$ que l'on note α.
Supposons $\alpha \neq 0$. Alors $\int^{+\infty} \alpha dx$ est divergente donc $\int^{+\infty} y'(x)dx$ aussi puisque $y'(x) \underset{+\infty}{\sim} \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ donc de signe fixe donc y' aussi asymptotiquement (ou l'on sait que y est décroissante ...). Mais si $x \geqslant 0$, $\int_0^x y'(t)dt = y(x) - y(0) \to c - y(0)$ quand $x \to +\infty$ donc l'intégrale $\int^{+\infty} y'(x)dx$ est convergente : il y a contradiction. Ainsi, $\alpha = 0$ i.e. $\frac{1}{2}e^c - c - 1 = 0$ i.e.

$$\boxed{\text{la fonction constante égale à } c \text{ est solution de } (E)}$$

► Comme on l'a vu, si γ est une constante, elle est solution de (E) ssi $\frac{1}{2}e^\gamma - \gamma - 1 = 0$ i.e. $\varphi(\gamma) = 0$ en notant $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}e^x - x - 1$.
φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ dont le signe est clair ce qui donne le tableau de variations suivant (les limites sont faciles, directes ou par croissances comparées) :

x	$-\infty$	c_1	0	$\ln(2)$	c_2	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$-\frac{1}{2}$ $\searrow$		$\nearrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$

Justifions : $\varphi(0) = -\frac{1}{2} < 0$ donc $\varphi(\ln(2)) < 0$. φ est continue strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(2)]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty, \ln(2)]$ sur $[\varphi(\ln(2)), \lim\limits_{-\infty} \varphi[= [\varphi(\ln(2)), +\infty[$. Comme $0 \in [\varphi(\ln(2)), +\infty[$, il existe un unique $c_1 \in]-\infty, \ln(2)]$ tel que $\varphi(c_1) = 0$. Comme on l'a vu, puisque $\varphi(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $c_1 < 0$.
On procède de même sur $[\ln(2), +\infty[$ et on trouve un unique $c_2 \geqslant \ln(2)$ tel que $\varphi(c_2) = 0$. On a donc bien prouvé que

$$\boxed{(E) \text{ admet exactement deux solutions constantes notées } c_1 \text{ et } c_2 \text{ telles que } c_1 < 0 < c_2.}$$

► On sait que y est décroissante et $y(0) = 0$ donc y est négative donc sa limite en $+\infty$ aussi donc $c \leqslant 0$. Puisque d'après ce qui précède, $c = c_1$ ou c_2 et $c_2 > 0$, il reste

$$\boxed{c = c_1}$$

Partie II. Séries de Dirichlet

4 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}$. On sait, par hypothèse, que $a_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\lambda_n = O(n)$ donc $\lambda_n^k a_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{n^k}{2^n}\right)$.
Mais $\frac{n^k}{2^n} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\frac{n^k}{2^n} / \frac{1}{n^2} = \frac{n^{k+2}}{2^n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ par croissances comparées. A fortiori, $\lambda_n^k a_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, $\sum \lambda_n^k a_n$ aussi de sorte que

$$\boxed{b_k \text{ est bien défini}}$$

5 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Alors $|f_n(x)| = |a_n| e^{-\lambda_n x} \leqslant |a_n|$ puisque $x \geqslant 0$ et $\lambda_n \geqslant 0$. Puisque $|a_n|$ ne dépend pas de x c'est que f_n est bornée est sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbf{R}_+} \leqslant |a_n|$$

On sait que $\sum a_n$ converge absolument (question précédente avec $k = 0$) donc $\sum \|f_n\|_{\infty, \mathbf{R}_+}$ converge i.e. $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbf{R}^+$ et a fortiori,

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément surt } \mathbf{R}_+}$$

Chaque f_n est évidemment continue et la convergence est uniforme sur $\mathbf{R}_+$ donc par théorème sur la continuité des sommes de séries de fonctions,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}_+}$$

6 ▷ ► Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(0) = a_n$ donc $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ donc

$$\boxed{f(0) = a_0 + b_0}$$

▶ Si $n \geqslant 1$ alors $\lambda_n > \lambda_0 = 0$ puisque (λ_n) est strictement croissante. Ainsi, $f_n(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.
Pour $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ donc $f_0 : x \mapsto a_0$ donc $f_0(x) \to a_0$ lorsque $x \to +\infty$.
Enfin, puisque $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$ et $+\infty$ est dans l'adhérence de $\mathbf{R}_+$, le théorème de limite des sommes de séries de fonctions donne $f(x) \to a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0$ lorsque $x \to +\infty$ i.e.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0}$$

7 ▷ On peut procéder par récurrence ou utiliser directement un théorème de classe C^k des sommes de séries de fonctions. J'opte pour la récurrence.

▶ Montrons par récurrence que la propriété

$$\boxed{P(k) : \text{" } f \in C^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \text{ et pour tout } x \geqslant 0,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x} \text{ "}}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$:

• **Initialisation** : $P(0)$ est vraie car il a déjà été vu que f est continue.

• **Hérédité** : soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ l'est aussi.

On sait donc que f est C^k et pour tout $x \geqslant 0$, $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x}$.
– Ainsi, $\sum_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ et sa somme est $f^{(k)}$.
– Chaque $f_n^{(k)}$ est C^1 et pour tout $x \geqslant 0$, $f_n^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\lambda_n^{k+1} a_n e^{-\lambda_n x}$ donc, comme précédemment,

$$\|f_n^{(k+1)}\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \lambda_n^{k+1}\,|a_n|$$

On a vu que $\sum \lambda_n^{k+1}\,|a_n|$ converge donc $\sum \left(f_n^{(k)}\right)'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}_+$.
Ainsi, d'après le théorème de classe C^1 des sommes de séries de fonctions, $f^{(k)}$ est C^1 i.e. f est C^{k+1} et pour tout $x \geqslant 0$,

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}\lambda_n^{k+1} a_n e^{-\lambda_n x}$$

ce qu'il fallait montrer.

▶ Soit $k \geqslant 1$. En évaluant en 0 on a donc

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n = (-1)^k \lambda_0^k a_0 + (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$$

Mais $\lambda_0 = 0$ et $k \geqslant 1$ donc $\lambda_0^k = 0$ de sorte que

$$\boxed{f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k}$$

8 ▷ Supposons f nulle. Il a été vu que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$ donc $a_0 = 0$.

Il reste donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$. En multipliant par $e^{\lambda_1 x}$ il vient

$$\forall x \geqslant 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} = 0$$

La suite $(\lambda_n - \lambda_1)_{n\geqslant 1}$ vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ (nulle en $n=1$, strictement croissante, tend vers $+\infty$, dominée par n) donc $a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} \to a_1$ lorsque $x \to +\infty$ donc $a_1 = 0$. On démontre ainsi par récurrence forte que

$$\boxed{\text{tous les } a_n \text{ sont nuls}}$$

Partie III. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

9 ▷ Nous avons vu que $y(0) = a_0 + b_0$. Or $y(0) = 0$ donc $b_0 = -a_0$.
Par ailleurs, on sait que $y(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$ mais par hypothèse, $y(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c$. Ainsi,

$$\boxed{a_0 = c \text{ et } b_0 = -c}$$

10 ▷ D'après (E), $y' = -y - 1 + \frac{1}{2}e^y$. Mais $y(0) = 0$ donc $y'(0) = -\frac{1}{2}$. Mais on a vu que $y'(0) = -b_1$ donc

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2}}$$

11 ▷ $g = e^y$ est C^∞ puisque exp et y le sont et $g' = y'g$.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On dérive $k-1$ fois cette relation en utilisant la formule de Leibniz :

$$g^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)} g^{k-1-i}$$

On évalue en 0, on utilise $y^{(i+1)}(0) = (-1)^{i+1} b_{i+1}$ et l'on note pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d_n = (-1)^n g^{(n)}(0)$:

$$(-1)^k d_k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i+1} b_{i+1} (-1)^{k-1-i} d_{k-1-i}$$

Les puissances de -1 se simplifient et en changeant d'indice, on a bien

$$\boxed{d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i}$$

puisque $d_0 = g(0) = e^0 = 1$.

12 ▷ D'après (E), $y' + y + 1 = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}g$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On dérive k fois cette relation et on évalue en 0 (attention, $1^{(k)} = 0$ car $k \geqslant 1$) :

$$y^{(k+1)}(0) + y^{(k)}(0) = \frac{1}{2} g^{(k)}(0) \text{ donc } (-1)^{k+1} b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k$$

donc

$$\boxed{b_{k+1} - b_k = -\frac{1}{2} d_k}$$

En utilisant conjointement les résultats des questions 11 et 12, il est possible de calculer récursivement la suite (b_n). La partie suivante montre comment en déduire une approximation de la suite (a_n) donc une approximation de la solution y de (C).

Partie IV. Approximation de la solution y

13 $\triangleright$ On sait déjà que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$ puisque l'on a montré que toute série de Dirichlet converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}^+$. On demande ici une estimation qualitative de cette convergence.

► Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

$$|y_N(x) - y(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n x} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

où l'utilisation de l'inégalité triangulaire est légitime puisque la dernière série converge, comme on l'a déjà vu. Puis,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} = M \frac{1}{2^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}$$

ce qui donne bien finalement

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \frac{M}{2^N}}$$

Puisque $\frac{M}{2^N} \to 0$ quand $N \to +\infty$, $\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \to 0$ donc on retrouve bien la convergence uniforme de y_N vers y.

► On peut obtenir une meilleure estimation de la vitesse de convergence sur un intervalle gardant 0 à distance puisque 0 maximise $e^{-\lambda_n x}$. On prend donc $a > 0$ et $\boxed{J = [a, +\infty[}$. Alors, par les mêmes calculs,

$$\|y_N - y\|_{\infty,J} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n a} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{M}{2^n} e^{-\lambda_{N+1} a}$$

en exploitant la décroissance de (λ_n). Et comme précédemment,

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty,J} \leqslant \frac{M}{2^N} e^{-\lambda_{N+1} a}}$$

ce qui est meilleur que $\frac{M}{2^N}$ puisque $\lambda_n \to +\infty$ et $a > 0$.

14 $\triangleright$ Au vu de l'expression de A et B, on a $VA = B$ avec V une matrice de Vandermonde :

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}}$$

15 $\triangleright$ La suite (λ_n) est strictement croissante donc ses valeurs sont deux à deux distinctes donc on sait que V est inversible :

$$\boxed{\text{le système } VA = B \text{ admet une unique solution}}$$

Partie V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

16 ▷ Supposons que l'on ait $S_0 = 0$. $S' = -IS$ donc par le théorème de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1, pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt} = 0$ donc S est nulle.
Alors il reste $I' = -I$ et $R' = I$.
$I' = -I$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $I(x) = I_0 e^{-x}$.
Puis $R'(x) = I_0 e^{-x}$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$ donc

$$\boxed{S(x) = 0 \quad I(x) = I_0 e^{-x} \quad R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})}$$

17 ▷ Comme vu précédemment, pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt}$. Comme $S_0 > 0$,

$$\boxed{S \text{ est strictement positive}}$$

La formulation de la question semble montrer que l'auteur du sujet avait en tête une autre preuve, plus compliquée.

18 ▷

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = \frac{S'^2 - SS''}{S^2} \underset{S'=-IS}{=} \frac{I^2S^2 + S(I'S + IS')}{S^2}$$

$$= I^2 + I' + I\frac{S'}{S} \underset{S'=-IS}{=} I^2 + I' - I^2 = I' \underset{I'=IS-I}{=} IS - I \underset{S'=-IS}{=} -S' + \frac{S'}{S}$$

ce qui donne bien finalement

$$\boxed{\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}}$$

19 ▷ On a $h(0) = 0$ et l'on souhaite montrer que $h' + h + 1 = \frac{1}{2}e^h$ i.e. $\frac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$.
Mais d'après ce qui précède, $\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}$. Pour $x \geqslant 0$, on intègre ceci de 0 à x :

$$\int_0^x \left(-\frac{S'}{S}\right)'(t)dt = -\int_0^x S'(t)dt + \int_0^x \frac{S'(t)}{S(t)}dt \text{ donc } -\frac{S'(x)}{S(x)} + \frac{S'(0)}{S(0)} = -S(x) + S(0) + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)$$

Mais $S(0) = S_0 = \frac{1}{2}$ et $S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4}$ donc

$$-\frac{S'(x)}{S(x)} - \frac{1}{2} = -S(x) + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)$$

ce qui donne bien $\frac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$. Ainsi,

$$\boxed{h \text{ est solution du problème de Cauchy } (C)}$$

20 ▷ D'après ce qui précède, $h = y$ donc $S = \frac{1}{2}e^y$. Ainsi, $|S_n - S| = \left|\frac{1}{2}e^{y_N} - \frac{1}{2}e^y\right| = \frac{1}{2}\left|e^{y_N} - e^y\right|$.
Pour estimer la différence de deux exponentielles, on utilise l'inégalité des accroissements finis (légitime car exp est C^1) : si $a < b$ alors

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |e^x - e^y| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} |\exp'(t)|\,|x - y| \leqslant e^b\,|x - y|$$

On doit donc maintenant localiser les fonctions y_N et y. Comme précédemment, si $x \geqslant 0$ alors

$$|y(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = 2M \text{ et de même } |y_N(x)| \leqslant 2M.$$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[-2M, 2M]$ ce qui donne $\left|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}\right| \leqslant e^{2M} |y_N(x) - y(x)|$. Mais on a vu que $\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \frac{M}{2^N}$ donc, l'un dans l'autre,

$$\boxed{\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}}$$

Puisque le majorant tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, on a bien montré que

$$\boxed{S_N \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } \mathbf{R}_+}$$

Partie VI. Modèle probabiliste

21 ▷ $1-p(i)$ est la probabilité pour une personne susceptible de ne pas être infectée lors de cette journée. Il s'agit donc de la probabilité que parmi les K personnes qu'elle rencontre, aucune ne soit infectée. On suppose que ces personnes sont choisies uniformément. Il y a donc $\binom{M}{K}$ choix de personnes et $\binom{M-i}{K}$ choix de personnes non infectées. Ainsi,

$$\boxed{p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i}{K}}{\binom{M}{K}}}$$

22 ▷ Avec $Z(\Omega) \subset \{0, \ldots, M\}$ et la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)_{(s,i,r)\in E}$, on a

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbf{E}[Z]} &= \sum_{k=0}^{M} k\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{k=0}^{M} k \sum_{(s,i,r)\in E} \mathbf{P}\left(Z = k \middle| (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) \mathbf{P}\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{M} \sum_{(s,i,r)\in E} k\mathbf{P}\left(Z = k \middle| (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) \mathbf{P}\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right) \\
&= \boxed{\sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbf{P}\left(Z = k \middle| (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)\right) \mathbf{P}\left((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\right)}
\end{aligned}$$

où la permutation des symboles $\sum$ est possible puisque toutes les sommes en jeu sont finies.

23 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition, $\tilde{S}_n, \tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ sont à valeurs dans $\{0, \ldots, M\}$ donc à support fini. Par conséquent, $\Delta\tilde{S}_n, \Delta\tilde{I}_n$ et $\Delta\tilde{R}_n$ le sont aussi. Or une variable aléatoire à support fini admet une espérance donc

$$\boxed{\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n, \Delta\tilde{S}_n, \Delta\tilde{I}_n \text{ et } \Delta\tilde{R}_n \text{ ont une espérance finie}}$$

24 ▷ $\Delta\tilde{R}_n$ et $\tilde{I}_n$ sont à support dans $\{0, \ldots, M\}$ donc avec la même technique qu'à la question 22 on a

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \sum_{i=0}^{M} \left(\sum_{k=0}^{M} k\mathbf{P}\left(\Delta\tilde{R}_n = k \middle| (\tilde{I}_n = i)\right)\right) \mathbf{P}\left(\tilde{I}_n = i\right)$$

► On peut dans un premier temps remarquer que $\sum_{k=0}^{M} k\mathbf{P}\left(\Delta\tilde{R}_n = k \middle| (\tilde{I}_n = i)\right)$ est l'espérance de $\Delta\tilde{R}_n$ conditionnellement à $(\tilde{I}_n = i)$. Mais $\Delta\tilde{R}_n$ est l'accroissement du nombre de récupérés et s'il y a au matin n, i infectés, le nombre de récupérés suit la loi binomiale $\mathcal{B}(i, \rho)$ puisque chaque personne infectée récupère avec probabilité ρ indépendamment des autres (somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre). Donc l'espérance conditionnelle est $i\rho$ et il reste

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right]} = \sum_{i=0}^{M} i\rho\mathbf{P}\left(\tilde{I}_n = i\right) = \rho\sum_{i=0}^{M} i\mathbf{P}\left(\tilde{I}_n = i\right) = \boxed{\rho\mathbf{E}\left[\tilde{I}_n\right]}$$

► La notion d'espérance conditionnelle n'est pas au programme et la preuve précédente peut ne pas être satisfaisante ...Il suffit alors de détailler un peu plus : comme on l'a vu précédemment, la loi de $\Delta\tilde{R}_n$ conditionnellement à $(\tilde{I}_n = i)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(i,\rho)$ donc $\mathbf{P}\left(\Delta\tilde{R}_n = k\middle|(\tilde{I}_n = i)\right) = \binom{i}{k}\rho^k(1-\rho)^{i-k}$ de sorte que

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \sum_{i=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{M} k\binom{i}{k}\rho^k(1-\rho)^{i-k}\right)\mathbf{P}\left(\tilde{I}_n = i\right)$$

Remarquons que le rappel fait dans l'énoncé sur la nullité des coefficients du binôme autorise cette écriture même lorsque $k > i$ mais en fait, la somme interne vaut $\sum\limits_{k=0}^{i} k\binom{i}{k}\rho^k(1-\rho)^{i-k}$.

On reconnait alors dans cette somme l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(i,\rho)$ donc elle vaut ρi et on termine comme précédemment.

25 ▷ $\left(\Delta\tilde{S}_n = -k\right)$ est l'événement : k personnes susceptibles deviennent infectées. Conditionnellement à l'événement $\left((\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right)$, chacune des s personnes susceptibles a la probabilité $p(i)$ d'être infectée, indépendamment des autres. On retrouve donc encore une loi binomiale $\mathcal{B}(s,p(i))$ ce qui donne bien

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\Delta\tilde{S}_n = -k\middle|(\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right) = \binom{s}{k}(p(i))^k(1-p(i))^{s-k}}$$

26 ▷ ► Avec la question 22 (adaptée à $\Delta\tilde{S}_n$ qui est à support dans $\{-M,\ldots,0\}$),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right] &= \sum_{(s,i,r)\in E}\left(\sum_{k=0}^{M}(-k)\mathbf{P}\left(\Delta\tilde{S}_n = -k\middle|(\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\right)\mathbf{P}\left((\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\\ &= -\sum_{(s,i,r)\in E}\left(\sum_{k=0}^{M} k\binom{s}{k}(p(i))^k(1-p(i))^{s-k}\right)\mathbf{P}\left((\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right)\end{aligned}$$

Là encore, on reconnait dans la somme interne l'espérance d'une binomiale $\mathcal{B}(s,p(i))$ donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right]} = -\sum_{(s,i,r)\in E} sp(i)\mathbf{P}\left((\tilde{S}_n,\tilde{I}_n,\tilde{R}_n) = (s,i,r)\right) = \boxed{-\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n p\left(\tilde{I}_n\right)\right]}$$

par la formule de transfert.

► On sait que la somme $\tilde{S}_n + \tilde{I}_n + \tilde{R}_n$ est constante donc $\Delta\tilde{S}_n + \Delta\tilde{I}_n + \Delta\tilde{R}_n = 0$ et par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right] + \mathbf{E}\left[\Delta\tilde{I}_n\right] + \mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = 0$. Les questions 24 et 26 donnent donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{I}_n\right]} = -\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{S}_n\right] - \mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \boxed{\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n p\left(\tilde{I}_n\right)\right] - \rho\mathbf{E}\left[\tilde{I}_n\right]}$$

Est-ce bien la relation attendue ? Pas sûr ...Qu'est-ce qu'on en fait ? ...

FIN