

## Concours d'Admission 1978

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES  
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE  
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

## Epreuve de MATHÉMATIQUES I ( 2 pages de texte )

OPTION  
M

On notera  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels.

La partie III est indépendante des parties I et II.

## I

On considère la suite  $P = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n-1} + x^{2n}.$$

Ainsi,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = 1 + x + x^2$ ,  $P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ . Pour tout  $x \neq 1$ , on sait que

$$P_n(x) = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}.$$

1- Quel est l'ensemble des racines réelles de l'équation  $P_n(x) = 0$  ?

2- Dessiner, dans un même repère, et justifier rapidement les positions mutuelles de la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto (1-x)^{-1}$  et des courbes représentatives des fonctions  $P_n$  et  $P_{n+1}$ , pour un entier  $n \geq 2$  et pour les  $x \in ]-\infty, 1[$ . Préciser les valeurs de  $P_n(1)$ ,  $P_n(-1)$  et celles des dérivées  $P_n'(1)$ ,  $P_n'(-1)$ . On tracera en pointillé l'arc correspondant à  $f$  et en traits pleins les arcs correspondant à  $P_n$  et  $P_{n+1}$ .

3- Quel est l'ensemble  $E$  des réels  $x$  pour lesquels la suite  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge ?

4- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$b_n = \inf_{\mathbb{R}} P_n(x)$$

Montrer que  $b_n > 0$  et que, pour  $n > 0$ , il existe un réel unique  $a_n$  pour lequel  $b_n = P_n(a_n)$ . On posera  $a_0 = 0$ .

5- a) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie précédemment admet une limite  $\alpha$  que l'on déterminera.

b) Déterminer un équivalent simple de  $a_n - \alpha$  pour  $n$  tendant vers  $+\infty$ .

c) La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle monotone ?

d) Résoudre pour la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des questions analogues à a), b), c).

## II

A tout vecteur  $\vec{V} = (x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}) \in \mathbb{R}^{2k}$  on associe l'application  $f_{\vec{V}}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f_{\vec{V}}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2k-1} x_i t^i}{P_k(t)}$$

1- Montrer que, pour tout  $\vec{V} \in \mathbb{R}^{2k}$ , cette application  $f_{\vec{V}}$  est bornée. On pose alors :

$$N(\vec{V}) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\vec{V}}(t)|$$

2- Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^{2k}$ .

3- On se place maintenant dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $k = 1$ , et l'on note  $\vec{V} = (x, y)$  plutôt que  $\vec{V} = (x_0, x_1)$ . On a ainsi

$$f_{\vec{V}}(t) = \frac{x + yt}{1 + t + t^2}$$

Montrer que l'ensemble  $S$  des  $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$  de norme 1,  $N(\vec{V}) = 1$ , est constitué d'arcs de coniques que l'on déterminera et que l'on construira, le plan affine  $\mathbb{R}^2$  étant rapporté au repère constitué par l'origine  $(0,0)$  et par la base  $((1,0), (0,1))$ .

4- La norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  est notée  $N'$ . On rappelle que les normes  $N$  et  $N'$  sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $0 < \alpha < \beta$  et telles que, pour tout  $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ , on ait :

$$\alpha \cdot N(\vec{V}) \leq N'(\vec{V}) \leq \beta \cdot N(\vec{V}).$$

Calculer la plus grande valeur possible de  $\alpha$  et la plus petite valeur possible de  $\beta$  avec une erreur au plus égale à  $5 \cdot 10^{-2}$ .

## III

Soit  $\mathfrak{B}$  l'espace vectoriel des suites réelles  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui sont bornées. On admet qu'en posant  $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$  on définit une norme sur  $\mathfrak{B}$ .

1- Vérifier, pour tout réel  $t \in [0, 1]$  et toute suite  $x \in \mathfrak{B}$ , la convergence de la série de

.../...

-2-

terme général  $u_{n,x}(t) = x_n t^n (1-t)$ , dont on appellera  $g_x(t)$  la somme .

2- Démontrer que, pour toute suite  $x \in \mathcal{B}$ , la fonction  $g_x: t \mapsto g_x(t)$  est bornée sur  $[0,1]$ .

3- On pose alors :

$$v(x) = \sup_{t \in [0,1]} |g_x(t)|$$

a) Montrer que  $v$  est une norme sur  $\mathcal{B}$  .

b) A titre d'exemples, calculer la norme  $v(x)$  lorsque  $x$  est la suite définie par :  $x_n = \cos(n.2\pi/3)$ , puis la norme  $v(x)$  lorsque  $x$  est la suite définie, avec  $p \in \mathbb{N}$  donné, par  $x_p = 1$  et  $x_n = 0$  si  $n \neq p$ .

4- Les normes  $\| \cdot \|$  et  $v$  sont-elles équivalentes ?

5- A toute suite  $x \in \mathcal{B}$  on associe la suite  $y = f(x)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$y_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x_k$$

a) Montrer que  $y \in \mathcal{B}$  .

b) Pour la norme  $\| \cdot \|$ , l'application  $f$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}$  est-elle continue ? Est-elle uniformément continue ?

c) Déterminer une relation simple entre  $g_x$  et  $g_y$ . Comparer  $v(x)$  et  $v(y)$ .  
Pour la norme  $v$ , l'application  $f$  est-elle continue ? Est-elle uniformément continue ?