Centrale - Supélec - PSI - I - 2021

Marche aléatoire sur un graphe orienté, application à Page Rank

I. Marche aléatoire sur un graphe

Q 1. Par hypothèse (un peu oubliée dans l'énoncé...), tout sommet s admet au moins une *arête sortante* (ou *arc*). Ainsi, la marche aléatoire est bien définie (conformément au programme, on ne se soucie pas de l'espace probabilisé sur lequel sont définis les événements et les variables aléatoires considérés), et l'on peut noter $(X_k)_{k\geqslant 0}$ cette marche aléatoire, où $X_k\colon \Omega \to [\![1, n]\!]$ est la variable aléatoire donnant la position du point à l'instant entier k. On peut dire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite finie $(X_k = j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ forme un système complet d'événements (en l'absence d'information sur le graphe et sur la distribution initiale $P^{(0)}$, il n'est pas exclu que certains de ces événements soient de probabilité nulle). On a ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_k = j) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Q 2. La formule des probabilités totales appliquée aux événements $(X_{k+1} = i)$ et au système complet $(X_k = j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ donne

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\colon p_i^{(k+1)} = \mathbf{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_{k+1} = i \,|\, X_k = j\right) \mathbf{P}(X_k = j) = \sum_{j=1}^{n} t_{j,i}\, p_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} t_{j,i},$$

ce qui traduit le produit matriciel $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$.

Q 3. Par une récurrence simple immédiate sur k, la formule de la question Q 2 donne $P^{(k)} = P^{(0)}T^k$.

Q 4. Si $\lim P^{(k)} = P$, alors, passer à la limite dans la relation $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$ (Q 2) donne $P = \lim \big(P^{(k)}T\big) = PT$, l'application $H \longmapsto HT \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})\big)$ étant continue, comme tout endomorphisme d'un e.v.n. de dimension finie. De plus, la convergence de la suite vectorielle $\big(P^{(k)}\big)_k$ est équivalente à la convergence des n suites de ses coordonnées et l'on a donc $\lim p_i^{(k)} = p_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'où

$$p_1 + \cdots + p_n = \lim p_1^{(k)} + \cdots + \lim p_n^{(k)} = \lim \big(p_1^{(k)} + \cdots + p_n^{(k)}\big) = 1.$$

Alternativement : $p_1 + \cdots + p_n = P(1, 1, \ldots, 1) = \big(\lim P^{(k)}\big)(1, 1, \ldots, 1) = \lim \big[P^{(k)}(1, 1, \ldots, 1)\big] = \lim 1 = 1$. Notons que jusqu'ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse d'équiprobabilité, qui se traduit par le fait que, à i fixé, $t_{i,j}$ prend au plus deux valeurs, dont 0.

Q 5. De chacun des quatre sommets sont issus trois arcs rejoignant les trois autres sommets. En partant d'un sommet, on a donc une probabilité $1/3$ de se diriger vers l'un quelconque de ces sommets. Ainsi, $T = \dfrac{1}{3}(J_4 - I_4)$.

Q 6. La matrice J_4 est symétrique réelle, donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale. Étant de rang 1, elle admet 0 comme valeur propre triple ; la somme de ses valeurs propres vaut $\mathrm{tr}(J_4) = 4$, donc 4 est sa dernière valeur propre. Par un calcul immédiat, si $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, alors $J_4X = \lambda X \iff TX = \dfrac{\lambda - 1}{3}X$, donc T et J_4 ont les mêmes espaces propres, les valeurs propres de T étant $\dfrac{0-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$, valeur propre triple, et $\dfrac{4-1}{3} = 1$, valeur propre simple, d'où l'existence de $Q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$T = Q\,\mathrm{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1)Q^{-1} = \frac{1}{3}Q\,\mathrm{diag}(-1, -1, -1, 3)Q^{\top}.$$

Q 7. Posons $D = \mathrm{diag}(-1/3, -1/3, -1/3, 1)$. Alors, $D^k = \mathrm{diag}\left((-1/3)^k, (-1/3)^k, (-1/3)^k, 1\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{diag}(0, 0, 0, 1)$. La linéarité de l'application linéaire $H \longmapsto \dfrac{1}{3}QHQ$ assure alors que la suite $(T^k)_k$ est convergente et de limite $T^{(\infty)} = Q\,\mathrm{diag}(0, 0, 0, 1)Q^{\top}$.

Pour identifier géométriquement $T^{(\infty)} = \lim T^k$, on peut se passer de cette expression : si $X \in E_1(T)$, alors $TX = X$, $T^kX = X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où $T^{(\infty)}X = X$; de même, pour $X \in E_1(T)^{\perp} = E_{-1/3}(T)$, on a $TX = -\dfrac{1}{3}X$, $T^kX = \dfrac{(-1)^k}{3^k}X$ et $T^{(\infty)}X = 0$ en passant à la limite. Finalement, $T^{(\infty)}$ est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $E_1(T) = E_4(J_4) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)^{\top}$.

Q 8. La question Q 3 donne $P^{(k)} = P^{(0)}T^k$. Par continuité de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $H \longmapsto P^{(0)}H$, la convergence de la suite de matrices $(T^k)_k$ entraîne celle de la suite $\big(P^{(k)}\big)_k$ et $P^{(\infty)} = \lim P^{(k)} = P^{(0)}T^{\infty}$. En transposant et en utilisant que $T^{(\infty)}$ est symétrique, on obtient que $P^{(\infty)\top}$ est dans l'image de $T^{(\infty)}$, donc que toutes ses coordonnées sont égales en vertu de la question précédente. Comme leur somme vaut 1 (question Q 4), $P^{(\infty)} = \big(1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4\big)$.

Q 9. La matrice admet 64 cases, mais elle se remplit très vite en s'y prenant de manière systématique. Chaque sommet est relié à trois autres sommets. Ainsi, on peut mettre 1/3 en facteur devant la matrice et remplir celle-ci avec des 0 et des 1. À ce stade, on obtient aussi que $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)T = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$.

Le sommet 1 est relié aux sommets 2, 4 et 5. Cela donne la première ligne et la première colonne de la matrice. Ensuite, le sommet 2 est relié aux sommets 1, 3 et 6. Comme l'arc entre les sommets 1 et 2 est déjà rentré, on ne prend en compte que les sommets 3 et 6 (ceux qui sont supérieurs à 2). On remplit alors les deuxièmes ligne et colonne, etc.

$$T = \frac{1}{3}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Q 10. L'observation du graphe montre que l'ensemble des arcs relient les sommets de S_1 à des sommets de S_2, et les sommets de S_2 à des sommets de S_1, ce qui traduit la proposition énoncée.

Q 11. D'après la question précédente et la condition initiale selon laquelle le point se trouve dans S_1 à la date $t = 0$, le point se trouve sur un sommet de S_1 aux dates paires et sur un sommet de S_2 aux dates impaires. Ainsi, $p_i^{(2k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in S_2$ et $p_i^{(2k+1)} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in S_1$. Si la suite $(P^{(k)})_k$ convergeait, elle convergerait vers le vecteur nul, vu que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(p_i^{(k)})_k$ admet une suite extraite nulle. Cela contredirait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lim p_i^{(k)} = \lim \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1$. Ce n'est pas demandé, mais on peut montrer que $(P^{(2k)})_k$ et $(P^{(2k+1)})_k$ convergent.

II. Matrices stochastiques et distributions de probabilités

Q 12. Étant entendu qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une distribution de probabilité si, et seulement s'il est à coordonnées positives et de somme 1, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si, et seulement si, elle est à coefficients positifs (ce sont des probabilités) et si la somme de chacune de ses lignes vaut 1. Comme, pour $U = (1,\ 1,\ \ldots,\ 1)^{\top}$, $MU|_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est stochastique si, et seulement si, $MU = U$.

Q 13. & 14. L'énoncé n'est pas cohérent. La partie I décrit une marche aléatoire dans le cas où le choix du sommet suivant se fait de manière équiprobable parmi les sommets accessibles et introduit dans ce cadre un formalisme matriciel. La partie II étend confusément la situation au cas où le choix ne se fait plus de manière équiprobable. Cela correspond à un graphe valué, l'arête (s, s') se voyant associer un poids égal à la probabilité de l'emprunter quand on se trouve au sommet s et la matrice correspondante étant bien une matrice stochastique (les coefficients non nuls, qui sont des probabilités conditionnelles, en sont positifs et la somme des éléments de chaque ligne vaut 1 comme la somme des probabilités d'un système complet). On peut aussi comprendre la mise en place de la partie II de manière exclusivement matricielle, le vecteur $P^{(k)}$ étant alors défini par la propriété démontrée à la question Q 2. Comme l'extension de la construction probabiliste revient à recopier la solution des deux premières questions du problème (où l'équiprobabilité ne joue aucun rôle), voyons les choses de manière matricielle : que $P^{(k)}$ soit un vecteur de probabilité pour tout k s'obtient par récurrence sur k. La relation $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$ assure que $P^{(k+1)}$ est à coordonnées positives et donne (ce qui répond également à la question Q 14) :

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} \times 1 = 1.$$

Q 15. Le calcul matriciel donne $L_i(MN) = L_i(M)N$, d'où la stabilité de l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par produit, les lignes d'une matrice stochastique étant des vecteurs de probabilité.

Q 16. L'ensemble $\mathcal{S}t_n(\mathbb{R})$ des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'intersection des n^2 demi-espaces $m_{i,j} \geqslant 0$ et des n hyperplans affines d'équation $m_{i,1} + \cdots + m_{i,n} = 1$, donc une intersection de parties convexes, donc un convexe, ce que la question demande de prouver. Notons en vue de la question Q 25 que l'on a représenté $\mathcal{S}t_n(\mathbb{R})$ comme une intersection finie de parties fermées (images réciproques par des applications continues des fermés $[0, +\infty[$ et $\{1\}$), donc que $\mathcal{S}t_n(\mathbb{R})$ est un convexe fermé.

Q 17. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ et U un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ. Soit $h \in [\![1,n]\!]$ tel que $|u_h| = \|U\|_\infty$. Par hypothèse, $MU = \lambda U$. En particulier, pour la coordonnée d'indice h, il vient

$$\sum_{j=1}^{n} m_{h,j} u_j = \lambda u_h \iff \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq h}} m_{h,j} u_j = (\lambda - m_{h,h}) u_h \qquad \therefore$$

$$|\lambda - m_{h,h}|\,\|U\|_\infty = \Big|\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq h}} m_{h,j} u_j\Big| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq h}} m_{h,j}|u_j| \leqslant \|U\|_\infty \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq h}} m_{h,j} = \|U\|_\infty\,(1 - m_{h,h}),$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, d'où $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$ en simplifiant par $\|U\|_\infty \neq 0$ (par définition d'un vecteur propre).

Q 18. Soit $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,i} = m_{i_0,i_0} \geqslant 0$. Avec les notations de la question précédente, l'inégalité triangulaire donne

$$|\lambda - \delta| = |\lambda - m_{i_0,i_0}| \leqslant |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h} - m_{i_0,i_0}| \overset{(Q17)}{\leqslant} (1 - m_{h,h}) + (m_{h,h} - m_{i_0,i_0}) = 1 - m_{i_0,i_0} = 1 - \delta.$$

La question précédente montre que les points dont les affixes sont les valeurs propres de M sont compris dans le disque de centre O et de rayon 1 ; la question présente assure qu'ils se trouvent dans le cercle de centre le point d'affixe δ et de rayon $1-\delta$, disque inclus dans le précédent. En particulier, si $|z| = 1$, alors

$$|z - \delta|^2 = (z - \delta)(\bar{z} - \delta) = 1 + \delta^2 - 2\delta\,\mathrm{Re}(z) \leqslant 1 + \delta^2 - 2\delta = (1-\delta)^2$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) = 1$, donc $z = 1$. Ainsi, 1 est la seul valeur propre possible de module 1 et la seule valeur propre de module 1 tout court par la question Q 12. Cette propriété se déduit alternativement d'une figure.

Q 19. Soient M une matrice stochastique strictement positive et U un vecteur propre associé à la valeur propre 1. En reprenant le calcul effectué à la question Q 17 et avec ses notations,

$$\|U\|_\infty = |u_h| = \left|\sum_{j=1}^{n} m_{h,j} u_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{h,j}|u_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_{h,j}\,\|U\|_\infty = \|U\|_\infty\,.$$

Ainsi, les inégalités sont des égalités. La première assure que les u_j sont de même signe, la deuxième qu'ils sont tous égaux en valeur absolue à $\|U\|_\infty$. Ainsi, $E_1(M) = \mathrm{Vect}(1,\,1,\ldots,\,1)^\top$ est de dimension 1.

Q 20. Si X est une distribution de probabilité invariante par M, on a $XM = X$ et, de manière équivalente, $M^\top X^\top = X^\top$, donc $X^\top \in E_1(M^\top)$. Or, la dimension des espaces propres est stable par transposition. Ainsi, deux distributions de probabilité invariantes par M sont proportionnelles, donc égales. On pose $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}$.

Q 21. Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $\big(i_0(k), i_1(k)\big) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $m^{(k)}_{i_0(k),j} = \alpha^{(k)}_j \leqslant \beta^{(k)}_j = m^{(k)}_{i_1(k),j}$.

$$\alpha_j^{(k+1)} = m^{(k+1)}_{i_0(k+1),j} = \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{m_{i_0(k+1),\ell}}_{\geqslant 0}\, m^{(k)}_{\ell,j} \geqslant \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_0(k+1),\ell}\,\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_0(k+1),\ell} = \alpha_j^{(k)},$$

$$\beta_j^{(k+1)} = m^{(k+1)}_{i_1(k+1),j} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_1(k+1),\ell}\, m^{(k)}_{\ell,j} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_1(k+1),\ell}\,\beta_j^{(k)} = \beta_j^{(k)} \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_1(k+1),\ell} = \beta_j^{(k)}.$$

Q 22. & 23. En reprenant le calcul de la question précédente,

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} = \sum_{\ell=1} \underbrace{m_{i_0(k+1),\ell}\,\big(m^{(k)}_{\ell,j} - \alpha_j^{(k)}\big)}_{\geqslant 0} \geqslant m_{i_0(k+1),i_1(k)}\big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big), \quad \text{(Q 22)}$$

$$\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{i_1(k+1),\ell}\big(\beta_j^{(k)} - m^{(k)}_{\ell,j}\big) \geqslant m_{i_1(k+1),i_0(k)}\big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big). \qquad \text{(Q 23)}$$

Q 24. On additionne les inégalités obtenues aux deux questions précédentes.

$$\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} + \beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} \geqslant \big(m_{i_0(k+1),i_1(k)} + m_{i_1(k+1),i_0(k)}\big)\big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big) \qquad \therefore$$

$$\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leqslant \big[1 - m_{i_0(k+1),i_1(k)} - m_{i_1(k+1),i_0(k)}\big]\big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big) \leqslant (1-2\varepsilon)\big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big).$$

Q 25. Par une récurrence immédiate, il vient $0 \leqslant \beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} \leqslant (1-2\varepsilon)^{k-1}\big(\beta_j^{(1)} - \alpha_j^{(1)}\big)$, d'où $\lim \big(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}\big) = 0$. Avec l'encadrement de la question Q 21, cela montre que les suites $\big(\alpha_j^{(k)}\big)_k$ et $\big(\beta_j^{(k)}\big)_k$ sont adjacentes. Elles convergent donc, et ont une même limite, disons b_j. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'encadrement $\alpha_j^{(k)} \leqslant m^{(k)}_{i,j} \leqslant \beta_j^{(k)}$ et le théorème des gendarmes montrent que $\lim m_{i,j}^{(k)} = b_j$. Ainsi, la suite $(M^k)_k$ est convergente, de limite B, toutes les lignes de B étant identiques. Le raisonnement de la question Q 16 montre que l'ensemble des matrices stochastiques est fermé, donc que B est stochastique.

Q 26. La suite $(\alpha_j^{(k)})_k$ est croissante (question 21), donc minorée par $\alpha_j^{(1)} \geqslant \varepsilon > 0$. Corrélativement, $b_j = \lim \alpha_j^{(k)} \geqslant \varepsilon > 0$.

Q 27. De $\lim M^k = B$, on déduit $\lim P^{(k)} = P^{(0)}B$ par continuité de l'application linéaire $H \longmapsto P^{(0)}H$. Or,

$$P^{(0)}B|_j = P^{(0)}C_j(B) = b_j \sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} = b_j \qquad \therefore \qquad \lim P^{(k)} = P^{\infty}.$$

Q 28. D'après la question Q 20, il existe au plus une distribution de probabilité invariante par M, donc P^{∞} est bien la seule.

III. Le graphe de la toile

Q 29. Le modèle est celui de la partie I. Si la page i ne pointe pas vers une autre page, le surfeur qui s'y trouve y reste presque sûrement. Sinon, il se dirige de manière équiprobable vers l'une des λ_i autres pages vers lesquelles pointe la page i.

Q 30. La matrice J_n/n est clairement stochastique et A l'est également, donc B aussi par convexité (question Q 16). Ses coefficients sont strictement positifs car ceux de J_n le sont et que $(1-\alpha)A$ est à coefficients positifs.

Q 31. Si la page i ne contient aucun lien, on a, en utilisant la symbole de Kronecker, $b_{i,j} = \dfrac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\delta_{i,j}$. La probabilité de quitter la page i est donc $1 - b_{i,i} = \dfrac{(n-1)\alpha}{n}$.

Q 32. La matrice B (qui n'est pas la matrice B de la partie II) vérifie les hypothèses imposées à la matrice M dans la partie II.C (matrice stochastique strictement positive). On peut donc lui appliquer les questions 27 et 28 : pour $Q^{(k)} = QB^k$, la suite $\left(Q^{(k)}\right)_k$ converge et sa limite Q^{∞} est l'unique distribution de probabilité invariante par B. Ce vecteur Q^{∞} définit les pertinences relatives des pages et l'on a donc $Q^{\infty} = \left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right)$ avec $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 1$. La relation $Q^{\infty} = Q^{\infty}B$ donne pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left[(1-\alpha)a_{i,j} + \frac{\alpha}{n}\right] = \frac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n} + (1-\alpha)\mu_j + (1-\alpha) \displaystyle\sum_{i,\, i\to j} \frac{\mu_i}{\lambda_i} & \text{si } j \to \emptyset, \\ \dfrac{\alpha}{n} + (1-\alpha) \displaystyle\sum_{i,\, i\to j} \frac{\mu_i}{\lambda_i} & \text{si } j \not\to \emptyset. \end{cases}$$

Si la page j ne pointe vers rien (deuxième cas ci-dessus), on constate que la pertinence μ_j est bien une fonction croissante des μ_i pour les pages i pointant vers la page j et une fonction décroissante du nombre λ_j de recommandations émises par ces mêmes pages. Si la page j ne contient pas de lien, la première expression se réécrit $\mu_j = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \displaystyle\sum_{i,\, i\to j} \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ et a les mêmes propriétés.

Q 33. & 34. Les fonctions s'écrivent facilement. La commande `A.dot(B)` est équivalente à `np.dot(A, B)`.

```
import numpy as np

def puissance1(B, k):
    Pdt = np.identity(B.shape[0])
    for i in range(k):
        Pdt = np.dot(Pdt, B)
    return Pdt
```

```
def puissance2(B, k):
    if k == 0:
        return np.identity(B.shape[0])
    q, r = divmod(k, 2)
    if r == 0:
        return puissance2(B.dot(B), q)
    return puissance2(B.dot(B), q).dot(B)
```

35. Le nombre de produits effectués par `puissance1(B, k)` est k, si l'on veut, 2^p dans le meilleur et $2^{p+1} - 1$ dans le pire des cas. Si $c(k)$ est le nombre de produits effectués par `puissance2(B, k)`, le programme donne, pour $k = 2q + r$, division euclidienne de k par 2, la relation de récurrence

$$c(k) = c(2q + r) = c(q) + r + 1$$

avec la condition initiale $c(0) = 0$ (condition de sortie des appels récursifs). On en déduit que $c(k) = z(k) + 2u(k)$, où $u(k)$ est le nombre de 1 de l'écriture binaire de k et $z(k)$ le nombre de 0, ce qui donne $p + 2 \leqslant c(k) \leqslant 2p + 2$. Notons qu'en distinguant aussi le cas $k = 1$, qui ne nécessite en fait pas de calcul, on peut abaisser de 2 le nombre de multiplications.