Eléments de correction : Mines-ponts 2010 - filière MP
Première composition (3h)

1. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\mathrm{e}^{it}) \in \mathbb{C}$ est continue et 2π périodique par composition (f est continue sur T et $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ est continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et arrive bien dans T). Ainsi c_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on a même par croissance de l'intégrale à bornes croissantes :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ |c_n| \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{où } \|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f| \text{ désigne la norme infinie de } f,$$

la fonction f étant bornée sur $\mathbb{R}$ car elle y est continue et périodique.
Ainsi, pour z de D, les séries géométriques $\sum \|f\|_\infty |z|^n$ et $\sum \|f\|_\infty |\bar{z}|^n$, de raisons $|z| < 1$ et $|\bar{z}| < 1$, sont convergentes et par comparaison, les séries $\sum c_n z^n$ et $\sum c_{-n} \bar{z}^n$ sont absolument convergentes donc convergentes (car $\mathbb{C}$ est complet).

Finalement, $\boxed{\text{la fonction } g_f \text{ est bien définie sur } D \text{ tout entier.}}$ Au passage, nous avons obtenu que le rayon de convergence de chacune des séries entières $\sum c_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

2. • Soit $(x_0; y_0) \in \widetilde{D}$, montrons que $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle par rapport à x en $(x_0; y_0)$ autrement dit que $s : x \mapsto \widetilde{S}(x; y_0)$ est bien définie au voisinage de x_0 et qu'elle est dérivable en x_0.

Soit $\varepsilon = (1 - |x_0 + iy_0|)/2 > 0$ et $\rho = (1 + |x_0 + iy_0|)/2 < 1$ (car $(x_0; y_0)$ est dans $\widetilde{D}$).
Pour tout x dans $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|x + iy_0| \leqslant |x_0 + iy_0| + |x - x_0| \leqslant |x_0 + iy_0| + \varepsilon = \rho$$

Ainsi $x + iy_0$ appartient à l'ouvert de convergence de la série entière définissant S puisque son rayon de convergence est au moins égal à 1 et $\rho > 1$. Ainsi s est défini sur le voisinage $I =]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ de x_0.

Considérons la suite de fonctions définies par $f_n : x \in I \mapsto a_n (x + iy_0)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, la série $\sum f_n$ converge simplement vers s sur I autrement dit

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ sur } I.$$

Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation terme à terme :
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I par composition. De plus, $f_n'(x) = n a_n (x + iy_0)^{n-1}$ pour tout x de I.
⋆ La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers s.
⋆ La série des dérivées $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément (car $\mathbb{C}$ est complet) sur I. En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\forall x \in I, \quad |f_n'(x)| = n|a_n||x + iy_0|^n \leqslant n|a_n|\rho^{n-1}$
donc $n|a_n|\rho^{n-1}$ majore $\{|f_n'(x)|; x \in I\}$ et à ce titre est plus grand que son plus petit majorant $\|f_n'\|_\infty$. Or les ouverts de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont confondus, donc la série à termes positifs $\sum n|a_n|\rho^{n-1}$ converge car $0 < \rho < 1$ est dans l'ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ donc dans celui de $\sum n a_n z^{n-1}$. Ainsi la série $\sum \|f_n'\|_\infty$ à termes positifs converge (i.e. $\sum f_n'$ converge normalement sur I) par comparaison à la série à termes positifs $\sum n|a_n|\rho^{n-1}$ convergente.

Le théorème de dérivation de dérivation terme à terme assure donc que s est de classe C^1 sur I donc en x_0 et que $s' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. En particulier $s'(x_0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x_0 + iy_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x_0 + iy_0)^{n-1}$.

Finalement, nous avons que $\boxed{\widetilde{S} \text{ admet une dérivée partielle selon } x \text{ en tout point de } \widetilde{D}}$ donnée par :

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x_0 + i y_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x_0 + i y_0)^n \qquad \forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}}$$

• Soit u la somme sur D de la série entière $\sum (n+1 = a_{n+1} z^n$ de la variable complexe z ; comme D est est inclus dans l'ouvert de convergence de u (car c'est le même que celui de $\sum a_n z^n$), u est bien défini et continue comme fonction de la variable z sur D. Ainsi $\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x} = \tilde{u} \text{ est continue comme fonction de deux variables sur } \widetilde{D}.}$

3. ⋆ Soit la suite définie par $b_n = i^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum b_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$ (car $|b_n| = |a_n|$ pour tout n), donc on peut appliquer la question précédente à $\sum b_n z^n$: ainsi, en notant $W : z \in D \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n = S(iz)$, la fonction $\widetilde{W} : (x; y) \mapsto \widetilde{S}(-y; x)$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur D donnée par

$$\forall (x_0; y_0) \in D, \quad \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) i^{n+1} a_{n+1} (x_0 + i y_0)^n = i \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (i x_0 - y_0)^n$$

Ainsi comme $\widetilde{S}(x; y) = \widetilde{W}(y; -x)$ pour tout $(x; y)$ de $\widetilde{D}$, par composition on en déduit que $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle selon y en tout point de $\widetilde{D}$ donnée par : $\forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}$

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x_0; y_0) = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x}(y_0; -x_0) = i \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (i y_0 - (-x_0))^{n-1} = i \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x_0 + i y_0)^n = i \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0)}$$

Et cette fonction est continue sur $\tilde{D}$ comme fonction de deux variables. Ainsi $\widetilde{S}$ admet une dérivée partielle selon x et selon y en tout point de D et ces fonctions sont continues comme fonctions de deux variables sur D ce qui prouve que $\boxed{\widetilde{S} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \widetilde{D}.}$

⋆ Soit la suite définie par $d_n = (n+1) a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série entière $\sum d_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$ dont elle est la série dérivée formelle, donc on peut appliquer la question précédente (**2**) et le premier point de la question **3** à $\sum d_n z^n$ ce qui permet de conclure que $\widetilde{u} : (x_0; y_0) \in \widetilde{D} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} d_n (x_0 + i y_0)^n = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x_0; y_0)$ est de classe C^1 sur D. On a même

$$\boxed{\forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}, \ \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} (x_0 + i y_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y \partial x}(x_0; y_0) = i \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} (x_0 + i y_0)^n}$$

⋆ On en déduit par multiplication par i que $i \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}$ est aussi de classe C^1 sur $\widetilde{D}$ et donc la fonction $\boxed{\widetilde{S} \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \widetilde{D}}$, on a de plus trouvé : $\forall (x_0; y_0) \in \widetilde{D}$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} (x_0 + i y_0)^n \text{ et } \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x_0; y_0) = i^2 \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0) = -\frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x_0; y_0)$$

Donc par somme $\boxed{(\Delta S)(z) = 0 \text{ pour tout } z \text{ de } D.}$

4. D'après la question **1**, les séries entières $\sum c_n z^n$ (de somme S_+) et $\sum c_{-n} z^n$ (de somme S_-) sont de rayon de convergence supérieur à 1, donc d'après la question **3**, les fonctions $\widetilde{S_+}$ et $\widetilde{S_-}$ sont de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ (et de laplacien nul). Par somme et composition, la fonction
$\widetilde{g_f} : (x;y) \in \widetilde{D} \mapsto \widetilde{S_+}(x;y) + \widetilde{S_-}(x;-y) - c_0$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ i.e. $\boxed{g_f \text{ est } C^2 \text{ sur } D}$ et par linéarité de la dérivation :

$$\forall z \in D, \ \ \Delta g_f(z) = \left(\frac{\partial^2 \widetilde{g_f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{g_f}}{\partial y^2}\right)(Re(z); Im(z)) = \Delta S_+(z) + \Delta S_-(\bar{z}) - 0 = 0$$

5. Soit z dans D, par définition des c_n et linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int} z^n \, dt$$

Les fonctions $u_n : t \in [-\pi;\pi] \mapsto f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int} z^n$ sont continues par composition et la série $\sum u_n$ converge uniformément car normalement sur le segment $[-\pi;\pi]$: en effet pour tout t de $[-\pi;\pi]$, on a $|u_n(t)| \leqslant |z|^n \|f\|_\infty$, donc $\|u_n\|_\infty \leqslant |z|^n \|f\|_\infty$ d'où la convergence de la série à termes positifs $\sum \|u_n\|_\infty$ par comparaison à la série géométrique $\sum |z|^n \|f\|_\infty$ convergente car de raion $|z| < 1$.
Ainsi, on peut intégrer terme à terme $\sum u_n$ sur $[-\pi;\pi]$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int} z^n\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-it}z} - 1\right)\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{ze^{-it}}{1-\mathrm{e}^{-it}z}\right)\right) dt\end{aligned}$$

Pour les des raisons similaires, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{int} \bar{z}^n\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{it}\bar{z}} - 1\right)\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{\mathrm{e}^{it}\bar{z}}{1-\mathrm{e}^{it}}\right)\right) dt\end{aligned}$$

Ainsi par somme et par linéarité de l'intégrale, on obtient à l'aide des deux expressions précédentes,

$$\begin{aligned}g_f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-it}z} - 1 + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{it}\bar{z}} - 1 + 1\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\left(2Re\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-it}z}\right) - 1\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\left(2Re\left(\frac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it}-z}\right) - 1\right) dt\end{aligned}$$

mais aussi

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\left(\frac{\mathrm{e}^{-it}z}{1-\mathrm{e}^{-it}z} + \frac{\mathrm{e}^{it}\bar{z}}{1-\mathrm{e}^{it}\bar{z}} + 1\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\left(2Re\left(\frac{z}{\mathrm{e}^{it}-z}\right) + 1\right) dt$$

donc par somme, on a (toujours par linéarité de l'intégrale de la partie réeelle)

$$\boxed{g_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it}) Re\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it}) P_z(t) \, dt}$$

6. • Pour tout n de $\mathbb{N}$, on obtient pour tout $k \in Z$,

$$c_k(p_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{pi} p_n(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-kt} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{pi} \mathrm{e}^{i(n-k)t}) \, dt = \delta_{k,n} \text{ avec } \delta_{k,n} \text{ le symbole de Kronecker}$$

d'où $g_{p_n}(z) = z^n$ pour tout $z \in D$ ainsi $\boxed{g_{p_n} = p_n}$. De même, on obtient $\boxed{g_{q_n} = q_n\ .}$

• En utilisant la question **5** pour $f = p_0 = 1$, on obtient $\boxed{1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\, dt \quad \forall z \in D.}$

• Modifions l'expression de $P_z(t)$ pour $t \in R$ et $z \in D$,

$$P_z(t) = Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) = \frac{Re\left((e^{it} + z)\ (e^{-it} - \bar{z})\right)}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} > 0 \text{ car } |z| < 1$$

7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(T)$ qui converge uniformément sur T vers f. Alors, chaque f_n étant continue, f est continue sur T donc appartient à $\mathcal{C}(T)$ et on peut noter $\|f - f_n\|_\infty = \sup_T |f - f_n|$. Soit z dans $\bar{D}$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$:
- soit $z \in T$ et $|G_f(z) - G_{f_n}(z)| = |f(z) - f_n(z)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$
- soit $z \in D$ et via la question **5** et la linéarité de l'intégrale

$$|G_f(z) - G_{f_n}(z)| = |g_f(z) - g_{f_n}(z)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{it}) - f_n(e^{it}))P_z(t)\, dt\right|$$

Or pour tout t de $[-\pi; \pi]$, on a $\left|(f(e^{it}) - f_n(e^{it}))P_z(t)\right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty\, P_z(t)$ car $e^{it} \in T$ et P_z est positif via **6**. Par croissance généralisée de l'intégrale, on obtient

$$|G_f(z) - G_{f_n}(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - f_n\|_\infty\, P_z(t)\, dt = \frac{\|f - f_n\|_\infty}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\, dt = \|f - f_n\|_\infty \text{ via } \mathbf{6}$$

Ainsi $\|f - f_n\|_\infty$ est un majorant de $\{|G_f(z) - G_{f_n}(z)|; z \in \bar{D}\}$ donc $\|G_f - G_{f_n}\|_\infty \leqslant \|f - f_n\|_\infty$. Par comparaison, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur T vers f i.e. $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0, la suite positive $(\|G_f - G_{f_n}\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 i.e. $\boxed{\text{la suite } (G_{f_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend uniformément vers } G_f \text{ sur } \bar{D}.}$

8. $\boxed{\text{Soit } f \text{ dans } \mathcal{C}(T)}$, notons $e_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$. Alors $f \circ e_1$ est une fonction 2π-périodique, continue par composition, donc d'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe une suite de polynôme trigonométriques $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f \circ e_1$ sur $\mathbb{R}$. Or tout polynôme trigonométrique R_n s'écrit $r_n \circ e_1$ où r_n est une combinaison linéaire des p_k et des q_k avec k décrivant $\mathbb{N}$ car $p_k \circ e_1 : t \mapsto e^{kt}$ et $q_k \circ e_1 : t \mapsto e^{-kt}$, autrement dit $R_n = r_n \circ e_1$ avec r_n dans $\mathcal{P}$. Alors $\sup_T |f - r_n| = \sup_\mathbb{R} |f \circ e_1 - r_n \circ e_1|$ puisque e_1 est surjective de $\mathbb{R}$ dans T, ainsi $\boxed{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de } \mathcal{P} \text{ convergeant uniformément vers } f \text{ sur } T.}$

D'après la question **7**, commme chaque fonction r_n est bien continue sur T, la suite G_{r_n} converge donc uniformément vers G_f sur $\bar{D}$. Or la question **6** a montré que $G_{p_k} = p_k$ et $G_{q_k} = q_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par linéarité de l'intégrale, la fonction qui à $g \in \mathcal{C}(T)$ associe son $n$ième coefficient de Fourier est linéaire, et donc $G_{r_n} = r_n$. Ainsi $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $\bar{D}$ qui converge uniformément sur $\bar{D}$ vers $\boxed{G_f \text{ qui est donc ipso facto continue sur } \bar{D}.}$

9. • Comme G est de classe C^2 sur $\bar{D}$ et $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$, par somme u est de classe C^2 sur $\bar{D}$ et $\Delta u = \Delta G + 4\varepsilon = 4\varepsilon$ car $\Delta G = 0$, ainsi pour tout z de $\bar{D}$, on a $\boxed{\Delta u(z) > 0}$.

• Comme u est une fonction de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur le compact $\bar{D}$, elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier son maximum : il existe $z_0 \in \bar{D}$ tel que $u(z) \leqslant u(z_0)$ pour tout $z \in \bar{D}$.
Si z_0 est dans D alors $\widetilde{u_x} : x \mapsto \widetilde{u}(x; Im(z_0))$ est définie sur un intervalle ouvert contenant $x_0 = Re(z_0)$ et par restriction atteint un maximum en x_0, donc comme $\widetilde{u_x}$ est de classe C^2 (par composition),

on a donc $\widetilde{u_x}'(x_0) = 0$ et $\widetilde{u_x}"(x_0) \leqslant 0$ (cf le lemme démontré ci-après) i.e. $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(Re(z_0); Im(z_0)) \leqslant 0$.
En considérant $\widetilde{u_y} : y \mapsto \widetilde{u}(Re(z_0)x; y)$, les mêmes arguments conduisent à $\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(Re(z_0); Im(z_0)) \leqslant 0$, ainsi par somme $\Delta u(z_0) \leqslant 0$, ce qui contredit le premier point de la question.
Ainsi z_0 est dans T, donc $G(z_0) = 0$ et $|z_0| = 1$ d'où $u(z_0) = \varepsilon$ et donc $\boxed{\forall z \in \bar{D}, \quad u(z) \leqslant \varepsilon}$

Démontrons par l'absurde le lemme utilisé précédemment à savoir que si v est une fonction de classe C^2 sur un intervalle I atteint un maximum en x_0 point intérieur à I alors $v"(x_0) \leqslant 0$. On a déjà que $v'(x_0) = 0$, supposons $v"(x_0) > 0$, alors par continuité de $v"$, il existe un intervalle ouvert I' centré en x_0 contenu dans I sur lequel $v"$ reste strictement positif, donc v' est strictement croissante sur I'. Or $v'(x_0) = 0$, donc $v' < 0$ sur $I' \cap]-\infty; x_0[$, et donc v est décroissante sur ce même intervalle, ce qui contredit le fait que v admette un maximum en x_0.

10. • Montrons que si $G : \bar{D} \to \mathbb{R}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après la question 9, on a $G(z) + \varepsilon|z|^2 \leqslant \varepsilon$ donc $G(z) \leqslant \varepsilon$ (car $|z|^2 \geqslant 0$) pour tout $z \in \bar{D}$. Ainsi en faisant tendre ε vers 0, on obtient $G \leqslant 0$ sur $\bar{D}$.
La fonction $-G$ vérifie aussi (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) donc d'après ce qu'on vient de voir, on a aussi $-G \leqslant 0$ sur $\bar{D}$ i.e. $G \geqslant 0$ sur $\bar{D}$. Donc par double inégalité $G = 0$.

• Montrons que si $G : \bar{D} \to \mathbb{C}$ vérifie (a1) pour $f = 0$, (a2) et (a3) alors $G = 0$ i.e. $G = G_f$.
Soit une telle fonction G. Alors les parties réelle et imaginaire $Re(G) : \bar{D} \to \mathbb{R}$ et $Im(G) : \bar{D} \to \mathbb{R}$ de G vérifient :
⋆ l'hypothèse (a2) car $Re(G)$ et $Im(G)$ sont continues sur $\bar{D}$ par continuité de G sur $\bar{D}$ (c'est l'hypothèse (a2) pour G).
⋆ l'hypothèse (a1) pour $f = 0$ car les restrictions de $Re(G)$ et $Im(G)$ à T sont respectivement les parties réelles et imaginaires de celle de G à T donc sont nulles car G vérifie (a1) pour $f = 0$.
⋆ l'hypothèse (a3). En effet, G vérifie (a3) donc la restriction $\hat{(G)}$ de G à D est C^2 et $\Delta G = 0$ sur D, ainsi les restrictions de $Re(G)$ et $Im(G)$ à D qui sont $Re(\hat{G})$ et $Im(\hat{G})$, sont de classe C^2 ; de plus, comme la dérivation et Re (respectivement Im) commutent, on a $\Delta Re(G) = Re(\Delta G) = 0$ et $\Delta Im(G) = Im(\Delta G) = 0$.
Ainsi par le premier point de la question, $Re(G) = Im(G) = 0$ i.e. $G = 0$.

• Traitons enfin le cas général et montrons que $\boxed{\text{si } G \text{ vérifie (a1) pour } f\text{, (a2) et (a3), alors } G = G_f.}$
Soit une telle fonction G, alors G_f vérifie les mêmes hypothèses (question **4** pour (a3), **8** pour (a2), et par définition pour (a1)). Donc $G - G_f$ vérifie (a1) pour $f - f = 0$, (a2) et (a3), donc $G - G_f = 0$ via le point précédent et donc $G = G_f$.

11. • La fonction G est définie par $\widetilde{G}(x; y) = \mathrm{e}^x \cos(y)$ pour tout $(x; y) \in \widetilde{\bar{D}}$, donc $\widetilde{G}$ est de classe C^2 sur $\widetilde{D}$ par composition et produit ce qui prouve que G est C^2 sur D. De plus,

$$\forall (x; y) \in \widetilde{D}, \quad \Delta G(x + iy) = \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial x^2}(x; y) + \frac{\partial^2 \widetilde{G}}{\partial y^2}(x; y) = \mathrm{e}^x \cos(y) + \mathrm{e}^x (-\cos(y)) = 0$$

Ainsi $\boxed{G \text{ vérife (a3).}}$

• Par composition, G vérifie aussi (a2) (continuité sur $\bar{D}$). Et comme G vérifie (a1) pour f la restriction de G à T, la question **10** donne $G = G_f$sur D.
La fonction G est définie par : $\forall z \in \bar{D}$

$$G(z) = \mathrm{e}^{Re(z)} \cos(Im(z)) = \mathrm{e}^{Re(z)} \frac{\mathrm{e}^{iIm(z)} + \mathrm{e}^{-iIm(z)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{Re(z)+iIm(z)} + \mathrm{e}^{Re(z)-iIm(z)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{\bar{z}}}{2}$$

Ainsi pour tout $x \in]-1;1[$, x est dans D et $G(x) = \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Par ailleurs, en notant pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c_n le $n$ième coefficient de Fourier de f, on a :
$\forall x \in]-1;1[\subset D, \quad G_f(x) = g_f(x) = c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(c_n + c_{-n})x^n$
Donc par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul (ici, il vaut au moins 1), on obtient comme $G_f = G$ sur $]-1;1[\subset D$: $c_0 = 1$ et $c_n + c_{-n} = 1/n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $c_n + c_{-n} = 1/(|n|!)$.
Or le coefficient c_k vaut : $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-ikt}dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t)\mathrm{e}^{-ikt}dt \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$
Donc par linéarité de l'intégrale, l'intégrale cherchée est :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\,dt = \frac{c_n + c_{-n}}{2} = \frac{1}{2|n|!} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } 1 \text{ sinon}}$$

12. Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.
• Supposons u de classe C^2 sur U et $\Delta u = 0$ sur U. Soit $a \in U$ et $R > 0$ tels que $\bar{D}(a;R) \subset U$ et notons $G : z \in \bar{D} \mapsto u(a + Rz) \in \mathbb{C}$.
Alors par composition G est C^2 sur D et $\Delta G(z) = R^2 \Delta G(a + Rz) = 0$ pour tout z de D, ainsi G vérifie (a3). Or G vérifie (a2) par composition et (a1) pour $f : z \in T \mapsto u(a + Rz)$ (qui est bien continue sur T par composition). Ainsi d'après **10**, on a $G = G_f$ et en particulier via **5** :
$\forall z \in D, G_f(z) = g_f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a + R\mathrm{e}^{it})P_z(t)\,dt.$
Or pour tout z de $D(a,R)$, le complexe $(z-a)/R$ est dans D, donc

$$\boxed{u(z) = G\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + R\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt}$$

• Réciproquement, supposons l'égalité précédente vraie pour tout z de $D(a;R)$ et tout $\bar{D}(a;R) \subset U$. Fixons $(a;R)$ avec $\bar{D}(a;R) \subset U$, l'application $f : z \in T \mapsto u(a + Rz)$ est continue sur T par composition (u est supposée continue sur U), ainsi g_f existe et vérifie via **5** :

$$\forall z \in D(a;R), \quad \frac{z-a}{R} \in D, \quad g_f\left(\frac{z-a}{R}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$$

Ainsi notre hypothèse assure $u(z) = g_f\left(\frac{z-a}{R}\right)$ pour tout $z \in D(a;R)$ et via **4**, g_f est C^2 sur D où son laplacien Δg_f est nul, donc par composition u est C^2 et de $\Delta u = 0$ sur $D(a;R)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{D}(a;R) \subset U$ et la régularité et le laplacien Δ étant des notions locales, u est C^2 et de laplacien nul sur la réunion W des $D(a;R)$, avec $\bar{D}(a;R) \subset U$. Or pour tout a dans U, il existe $R > 0$ avec $D(a,R) \subset U$ donc $\bar{D}(a,R/2) \subset U$ ainsi a est dans W et donc $U \subset W$ et comme par définition $W \subset U$, on a $W = U$ et donc bien $\boxed{u \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } U \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$

13. Par la partie directe de **12**, on a pour tout $(a;R)$ avec $\bar{D}(a;R) \subset U$ et pour tout z de $D(a;R)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} u_n(\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt \quad (*)$$

Or sur $[-\pi;\pi]$, les fonctions $g_n : t \mapsto u_n(\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$ sont continues (par composition) et la suite correspondante converge uniformément vers $g : t \mapsto u(\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)$ sur $[-\pi;\pi]$. En effet

$$\forall t \in [-\pi;\pi], \quad |g_n(t) - g(t)| \leqslant \left(\sup_T |u_n - u|\right)\left|P_{\frac{z-a}{R}}(t)\right| \leqslant \left(\sup_T |u_n - u|\right)\frac{R + |z-a|}{R - |z-a|}$$

car par définition $|P_z(t)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout z de D.
Ainsi le théorème d'échange limite et intégrale assure que $\left(\frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi g_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi g(t)dt$. Par ailleurs, $(u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(z)$ par choix des u_n donc on peut passer à la limite dans $(*)$ ce qui donne $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^\pi u(\mathrm{e}^{it})P_{\frac{z-a}{R}}(t)\,dt$ et ce pour tout z de $D(a;R)$ avec $\bar{D}(a;R) \subset U$. Or u est continue sur U comme limite uniforme (sur U) de la suite de fonctions continues u_n sur U. Ainsi la réciproque de **12** assure que $\boxed{u \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } U \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } U.}$

14. La question **6** assure que $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c2) et (c3).}}$
Dans **7**, avec $f_n = 0$ (donc $G_{f_n} = 0$), on a vu $|\varphi(f)| = |G_f(z) - G_{f_n}(z)| \leqslant N(f - f_n) = N(f)$ et ce pour tout f de $\mathcal{C}(T)$ donc $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c4).}}$
Enfin, l'application qui à $f \in \mathcal{C}(T)$ associe la suite de ses coefficients de Fourier est $\mathbb{C}$-linéaire par linéarité de l'intégrale, donc par produit $f \in \mathcal{C}(T) \mapsto (c_n(f)z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $f \in \mathcal{C}(T) \mapsto (c_{-n}(f)\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi. L'application qui à une suite associe la somme de la série associée (quand celle-si est convergente) est aussi $\mathbb{C}$-linéaire donc par composition et combinaison linéaire, φ est bien $\mathbb{C}$-linéaire. De plus, elle arrive dans C, donc c'est une forme $\mathbb{C}$-linéaire et comme on a (c4), φ est bien continue et $\boxed{\varphi_z \text{ vérfie (c1).}}$

15. Soit φ vérifiant (c1), (c2) et (c3). Considérons f dans $\mathcal{C}(T)$. D'après **8**, il existe une suite $(f_n)_{n\in N}$ de fonctions de $\mathcal{P}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T.
Or pour tout g de $\mathcal{P}(T)$, par définition de $\mathcal{P}(T)$, il existe N et M deux entiers naturels non nuls et des complexes $(\alpha_k)_{k=0\ldots N}$ et $(\beta_k)_{k=1\ldots M}$ avec $g = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k p_k + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k q_k$ donc la linéarité de φ et φ_z (hypothèse (c1), cf **14** pour φ_z) puis les les hypothèses (c2) et (c3) vérifiées par φ et φ_z, assurent

$$(\varphi - \varphi_z)(g) = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k(\varphi - \varphi_z)(p_k) + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k(\varphi - \varphi_z)q_k = \sum_{k=0}^{N}\alpha_k(z^k - z^k) + \sum_{k=1}^{M}\alpha_k(\bar{z}^k - \bar{z}^k) = 0$$

Ainsi $\varphi(f_n) = \varphi_z(f_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur T i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme N, donc par continuité de φ et φ_z (hypothèse (c1), cf **14** pour φ_z), $\varphi(f_n)$ tend vers $\varphi(f)$ et $\varphi_z(f_n)$ vers $\varphi_z(f)$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\varphi(f) = \varphi_z(f)$. Comme f a été choisi quelconque dans $\mathcal{C}(T)$, on a bien $\boxed{\varphi = \varphi_z.}$

16. • Montrons que $(N(h))^2 = \sup_T |h|^2$.
Comme $N(h)$ majore $\{|h(t)|; t \in T\}$, par croissance dela fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, le réel $(N(h))^2$ majore bien $\{|h(t)|^2; t \in T\} = W$ donc $\sup W = \sup_T |h|^2 \leqslant (N(h))^2$ car $\sup W$ est le plus petit majorant de W.
Par défintion de N, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de terme général $|h(t_n)|$ tend vers $N(h)$, mais alors $|h(t_n)|^2$ tend vers $(N(h))^2$ (par continuité de la fonction carrée) et $|h(t_n)|^2 \leqslant \sup W$ pour tout n (par défintion de $\sup W$), ainsi par croissance du passage à la limite $(N(h))^2 \leqslant \sup W$ et par double inégalité, on a bien $(N(h))^2 \leqslant \sup W = \sup_T |h|^2$.

• Comme f continue sur T, fermé borné donc compact de $\mathbb{C}$, à valeurs réelles, elle y est bornée et atteint ses bornes en particulier son maximum disons en z_0. Comme f est positive, $|f| = f$ et donc $N(f) = f(z_0)$. Ainsi $|h(z)|^2 = |2f(z) - f(z_0) + i\lambda|^2 = (2f(z) - f(z_0))^2 + \lambda^2$ pour tout z de T, avec

$$0 \leqslant f(z) \leqslant f(z_0) \text{ donc } 0 - f(z_0) \leqslant 2f(z) - f(z_0) \leqslant 2f(z_0) - f(z_0) = f(z_0) \text{ i.e. } |2f(z) - f(z_0)| \leqslant f(z_0)$$

Ainsi par croissance du carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $|h(z)|^2 \leqslant (f(z_0))^2 + \lambda^2 = (N(f))^2 + \lambda^2$ pour tout z de T

et on a aussi $|h(z_0)|^2 \leqslant (-f(z_0))^2 + \lambda^2 = (N(f))^2 + \lambda^2$. Ainsi

$$\boxed{(N(h))^2 = \sup_T |h|^2 = (N(f))^2 + \lambda^2}$$

17. Pour tout réel λ, notons $h_\lambda = 2f - N(f) + i\lambda = 2f + (-N(f) + i\lambda)\, p_0$.
La linéarité de φ (hypothèse (c1)) donne $\varphi(h_\lambda) = 2\varphi(f) + (-N(f) + i\lambda)\varphi(p_0)$ par donc comme $\varphi(p_0) = z^0 = 1$ via (c2), on a $\varphi(h_\lambda) = 2\varphi(f) - N(f) + i\lambda$. Ainsi d'après (c4), on obtient par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

$$|\varphi(h_\lambda)|^2 = |2\varphi(f) - N(f) + i\lambda|^2 \leqslant (N(h_\lambda))^2 = (N(f))^2 + \lambda^2$$

soit par expression du module à l'aide des parties réelle et imaginaire,
$(2Re\,(\varphi(f)) - N(f))^2 - (N(f))^2 + (2Re(\varphi(f)) - \lambda)^2 - \lambda^2 \leqslant 0$
soit encore $(Re(\varphi(f)) - N(f))Re(\varphi(f)) + (Im(\varphi(f)) - \lambda)\, Im(\varphi(f)) \leqslant 0$
Or le membre de gauche de cette expression est affine en λ et reste constamment négatif pour toute valeur de λ donc le polynçome en λ est constant et le coefficient de λ à savoir $Im(\varphi(f))$ est nul. Ainsi $\boxed{\varphi(f) \text{ est réel}}$. On obtient alors $(\varphi(f) - N(f))\,\varphi(f) \leqslant 0$ ce qui impose comme $N(f) \geqslant 0$, l'appartenance de $\varphi(f))$ au segment $[0; N(f)]$, on retrouve une conséquence de l'hypothèse (c4) et aussi $\boxed{\varphi(f) \geqslant 0}$.

18. • La question **17**) montrer que si $f \in \mathcal{C}(T)$ arrive dans $\mathbb{R}_+$ alors $\varphi(f)$ appartient à $\mathbb{R}_+$ donc à $\mathbb{R}$. Donc si $f \in \mathcal{C}(T)$ arrive dans $\mathbb{R}_-$ alors $-f$ appartient à $\mathcal{C}(T)$ et arrive dans $\mathbb{R}_+$, donc via **17**, le complexe $\varphi(-f) = -\varphi(f)$ (par linéarité de φ, propriété (c1)) est en fait dans $\mathbb{R}$.
Or si $f \in \mathcal{C}(T)$ est à valeurs réelles alors $f = f_+ - f_-$ avec $f_\varepsilon : z \in T \mapsto \max(\varepsilon f(z); 0)$ où $\varepsilon = \pm$, qui sont encore dans $f \in \mathcal{C}(T)$. Ainsi par linéarité de φ, on obtient $\varphi(f) = \varphi(f_+) - \varphi(f_-)$ avec d'après ce qui précède $\varphi(f_+)$ et $\varphi(f_-)$ réels donc par somme $\varphi(f)$ est aussi réel.
Ainsi $\boxed{\varphi \text{ envoie les éléments de } \mathcal{C}(T) \text{ à valeurs réelles dans } \mathbb{R}\text{, propriété notée (c5).}}$

Soit f quelconque dans $\mathcal{C}(T)$. Ses parties réelle et imaginaire sont encore dans $\mathcal{C}(T)$. Donc

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{f}) &= \varphi(Re(f) - i\, Im(f)) \\
&= \overline{\varphi(Re(f)) - i\,\varphi(Im(f))} && \text{par } \mathbb{C}\text{-linéarité de } \varphi \text{ (hypothèse (c1))} \\
&= \overline{\varphi(Re(f)) + i\,\varphi(Im(f))} && \text{propriété (c5)} \\
&= \overline{\varphi(Re(f) + i\, Im(f))} = \overline{\varphi(f)} && \text{par } \mathbb{C}\text{-linéarité de } \varphi \text{ (hypothèse (c1))}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\forall f \in \mathcal{C}(T),\ \ \varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}}$

• En appliquant la propriété précédente à chaque p_n, on trouve en utilisant l'hypothèse (c2), que φ vérifie l'hypothèse (c3) puisque $\overline{p_n} = q_n$. Ainsi φ satisfait (c1), (c2), (c3) et (c4) donc via le résultat de la question **15**, on a encore $\boxed{\varphi = \varphi_z}$.