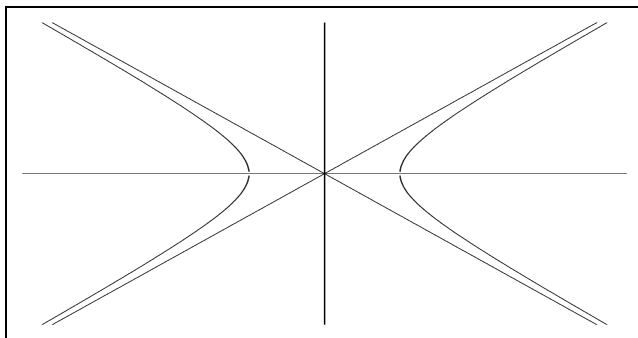


## CCP 2013. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

### EXERCICE



Les tangentes en les points  $(\pm 1, 0)$  sont verticales et les asymptotes ont pour équation  $x^2 - 13y^2 = 0$ .

Outre le couple  $(1, 0)$  qui est évidemment solution, l'algorithme ci-dessous montre que le problème cherché a une unique autre solution : le couple  $(649, 180)$ .

#### Algorithme

```
L <- (1,0)
Pour y de 1 à 200 faire
  x <- sqrt(1+13*y*y)
  Si int(x) = x
    L <- L, (x,y)
  Fin si
Fin pour
-> L
```

#### Traduction CAML

```
let test () =
  let l = ref [(1,0)] in
  for y=1 to 200 do
    let x = sqrt(float_of_int(1+13*y*y)) in
    if (float_of_int(int_of_float x) = x)
    then l := (int_of_float x,y) :: !l
  done;
  !l
;;
```

#### Traduction MAPLE

```
test := proc()
  s := [1,0]:
  for y from 1 to 200 do
    x := sqrt(1+13*y*y):
    if (floor(x) = x) then s := s, [x,y] fi
  od:
  s
end:
```

#### Traduction PYTHON

```
from math import *
def test():
  l = [(1,0)]
  for y in range(1,201):
    x = sqrt(13*y*y+1)
    if (int(x) == x):
      l.append((int(x),y))
  return l
```

### PROBLÈME

- 1)
- a) Si  $a \in T_1(\mathbb{R})$  en particulier il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $b^2 = a$  donc  $a \geq 0$ . Réciproquement si  $a \geq 0$  alors, pour tout entier  $n \geq 2$ , on a  $b^n = a$  avec  $b = \sqrt[n]{a}$ . Donc  $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ .  $\square$
- b)  $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\theta_k} \right\}_{k=0..n-1}$  avec  $\theta_k = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}$ .  $\square$
- c) 0 est évidemment TPC ainsi que tout complexe non nul par la question précédente. Donc  $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .  $\square$
- 2)
- a) Si  $A \in T_p(\mathbb{K})$ , pour tout entier  $n \geq 1$  il existe  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  telle que  $B^n = A$ .  
Il en découle que  $\det A = (\det B)^n$  donc que  $\det A \in T_1(\mathbb{K})$  puisque  $\det B \in \mathbb{K}$ .  $\square$
- b) Il en résulte par exemple que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$ , d'après la question 1)a), puisque  $\det A < 0$ .  $\square$
- 3) Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car la matrice  $A$  proposée est bien à déterminant positif mais n'est pas toute puissante.  
En effet s'il existait une matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ , on aurait (avec les notations de l'énoncé) :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ d^2 + bc = -2 & (2) \\ b(a+d) = 0 & (3) \\ c(a+d) = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) implique que  $b$  et  $c$  sont non nuls.  
(3) et (4) impliquent alors que  $a+d=0$  donc  $a^2 = d^2$ .  
Les équations (1) et (2) sont alors incompatibles.  $\square$

- 4)  
 a) En remplaçant la première colonne  $C1$  du déterminant caractéristique par  $C1 + C3$  on peut factoriser par  $\lambda - 2$ .  
 Puis en remplaçant la troisième ligne  $L3$  par  $L3 - L1$  on se ramène à un déterminant d'ordre 2.  
 Il vient ainsi que  $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$ .  
 Il en découle que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\dim E_2 = 2$ .  
 Or le système  $AX = 2X$  se réduit à  $2x - 3y - 2z = 0$  donc  $E_2$  est le plan engendré par exemple par  $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$   
 et  $\vec{e}_2 = (0, 2, -3)$  et  $A$  est bien diagonalisable.  $\square$

- b) Un calcul immédiat prouve que la droite  $E_1$  est engendrée par  $\vec{e}_3 = (1, 1, -1)$ .  
 Notons  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base diagonalisante  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $D = \text{diag}(2, 2, 1)$  de sorte que  $A = PDP^{-1}$ .  
 Pour  $n \geq 1$  soit  $B_n = PD_nP^{-1}$  avec  $D_n = \text{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1)$ . Alors  $B_n^n = A$  donc  $A$  est TPR.  $\square$

c)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . La calculatrice fournit  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  ainsi que  
 $B_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -3 + 3\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} & -3 + 4\sqrt{2} & -2 + 2\sqrt{2} \\ -2 + 2\sqrt{2} & 3 - 3\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$  et  $B_3 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt[3]{2} & -3 + 3\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ 2 - 2\sqrt[3]{2} & -3 + 4\sqrt[3]{2} & -2 + 2\sqrt[3]{2} \\ -2 + 2\sqrt[3]{2} & 3 - 3\sqrt[3]{2} & 2 - \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$

- 5)  $A$  est la matrice de l'homothétie de rapport  $-1$  donc de la rotation d'angle  $\pi$ . De sorte que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $B_n^n = A$  avec  $B_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$  et  $A$  est TPR.  $\square$

- 6) Soit  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  nilpotente.  
 a) Il existe  $r \geq 1$  tel que  $N^r = 0$  donc  $X^r$  annule  $N$  de sorte que  $0$  est la seule valeur propre de  $N$ . Ainsi  $\chi_N = (-1)^p X^p$  et  $N^p = 0$  par le théorème de Cayley-Hamilton.  $\square$

- b) Si  $N$  est TPK, en particulier il existe  $B$  telle que  $B^p = N$  donc  $B^{p^2} = N^p = 0$  de sorte que  $B$  est nilpotente et donc  $B^p = 0$  i.e.  $N = 0$ .  $\square$

- 7) Comme les  $\lambda_i$  pour  $i$  de  $1$  à  $k$  sont deux à deux distincts, les polynômes  $(X - \lambda_i)^{r_i}$  sont premiers entre eux deux à deux et le théorème de décomposition des noyaux joint au théorème de Cayley-Hamilton fournit la décomposition cherchée.  $\square$

- 8)  
 a) Si  $v$  commute avec  $u$  alors  $v$  commute avec  $Q(u)$  donc  $\text{Ker } Q(u)$  est stable par  $v$ .  $\square$   
 b)  $u$  commute avec  $u - \lambda_i \text{id}$  et en appliquant la question précédente (avec  $v = u$ ,  $u = u - \lambda_i \text{id}$  et  $Q = X^{r_i}$ ), il vient que  $C_i$  est stable par  $u$ .  $\square$

- 9) Comme  $C_i$  est stable par  $u$  donc par  $u - \lambda_i \text{id}$ , il vient pour tout  $\vec{x} \in C_i$  :  
 $(u_{C_i} - \lambda_i \text{id}_{C_i})^{r_i}(\vec{x}) = (u - \lambda_i \text{id})^{r_i}(\vec{x}) = \vec{0}$ .  $\square$

- 10) Ainsi  $u_{C_i} = \lambda_i \text{id}_{C_i} + v_i$  où  $v_i$  est un endomorphisme nilpotent de  $C_i$ .  
 Dans toute base de  $C_i$  la matrice de  $u_i$  est donc de la forme  $A'_i = \lambda_i \text{Id}_{p_i} + N_i$  avec  $N_i$  nilpotente.  
 La matrice de  $u$  dans toute base adaptée à la décomposition  $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_k$  est donc  $A' = \text{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_k)$  qui est bien de la forme demandée.  $\square$

- 11) Supposons  $A'_i$  TPK pour tout  $i$  de  $1$  à  $k$  et soit  $n \geq 1$  un entier quelconque.  
 Pour tout  $i$ , il existe  $B'_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$  telle que  $(B'_i)^n = A'_i$ .  
 Alors  $(B')^n = A'$  par calcul par blocs avec  $B' = \text{diag}(B'_1, B'_2, \dots, B'_n)$  donc  $B^n = A$  avec  $B = PB'P^{-1}$ .  
 Ainsi  $A$  est bien TPK.  $\square$

- 12)  
 a) Si  $V$  est le polynôme nul on a bien  $V = X^p Q$  avec  $Q$  le polynôme nul.  
 Sinon notons  $k$  la valuation de  $V$  :  $V = a_k X^k + a_{k+1} X^{k+1} + \dots + a_m X^m$  avec  $a_k \neq 0$ . Alors  $V(x) \sim a_k x^k$  au voisinage de  $0$  de sorte que  $x^k = o(x^p)$  ce qui entraîne  $k > p$ . Il en découle que  $X^p$  divise  $V$ .  $\square$

b) Notons  $U(x) = 1 + \frac{1}{n}x + \dots + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1) \dots (\frac{1}{n} - p + 1)}{p!} x^p$  de sorte que  $(1 + x)^{1/n} = U(x) + o(x^p)$ .

Il vient alors  $1 + x = (U(x) + o(x^p))^n = U(x)^n + \sum_{k=1}^n C_n^k U(x)^{n-k} o(x^{kp})$

Or  $U(x) \sim 1$  donc  $U(x)^{n-k} o(x^{kp}) = o(x^{kp}) = o(x^p)$  pour  $k$  de  $1$  à  $n$  de sorte que  $1 + x = U(x)^n + o(x^p)$   $\square$

- c) Résulte immédiatement de a) et du fait que  $1 + X - U(X)^n$  est un polynôme.  $\square$

13)

a) Soit  $n \geq 1$  un entier quelconque. Avec les notations de la question précédente :  $(1 + X)(N) = U(N)^n + N^p Q(N)$  par le classique morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X]$  sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Or  $N^p = 0$  par la question 6)a).

Ainsi  $\text{Id} + N = U(N)^n$  donc  $\text{Id} + N$  est TP $\mathbb{K}$ .  $\square$

b) Soit  $\lambda$  non nul. Il vient  $\lambda \text{Id}_p + N = \lambda(\text{Id}_p + N')$  avec  $N' = \frac{1}{\lambda}N$  clairement nilpotente.

Par la question précédente, il existe  $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  telle que  $(B')^n = \text{Id}_p + N'$ .

Si  $\lambda$  est en outre TP $\mathbb{K}$ , il existe  $\lambda'$  tel que  $(\lambda')^n = \lambda$  et  $B^n = \lambda \text{Id}_p + N$  avec  $B = \lambda' B'$  et  $\lambda \text{Id}_p + N$  est TP $\mathbb{K}$ .  $\square$

14)

a) Si  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  alors, par la question 10),  $A$  est semblable à une matrice  $B = \text{diag}(A'_1, A'_2, \dots, A'_k)$  avec  $A'_i = \lambda_i \text{Id}_{p_i} + N_i$  où les matrices  $N_i$  sont nilpotentes et  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

Si  $A \in GL_p(\mathbb{C})$ ,  $\lambda_i \neq 0$  donc  $\lambda_i$  est TPC (question 1c) donc  $A'_i$  est TPC par la question précédente.

La question 11) prouve alors que  $A$  est TPC  $\square$

b) La question 6)b) prouve qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas TPC.  $\square$

15) Exemple 1 :

Soit la matrice d'ordre 4 diagonale par bloc d'ordre 2 :  $A = \text{diag}(R, (0))$  où  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est (matrice triangulaire)  $X^2(X^2 + 1)$  donc  $A$  est non inversible (0 est valeur propre) et non diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (polynôme caractéristique non scindé sur  $\mathbb{R}$ ).

Cependant  $A$  est TP $\mathbb{R}$  car, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $B_n^n = A$  avec  $B_n = \text{diag}(R_n, (0))$  où  $R_n$  est la matrice de

la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2n}$  :  $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2n}) & -\sin(\frac{\pi}{2n}) \\ \sin(\frac{\pi}{2n}) & \cos(\frac{\pi}{2n}) \end{pmatrix} \square$

Exemple 2 où  $A$  n'est même pas diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  (elle l'est dans l'exemple précédent) :

Remplaçons dans l'exemple précédent  $R$  par la matrice  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le spectre de  $A$  est  $(1, 1, 0, 0)$  mais le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par  $\vec{e}_1$  ce qui prouve que  $A$  est non inversible et non  $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

Or  $S = \text{Id}_2 + N$  avec  $N$  nilpotente car  $N^2 = 0$ . Par la question 13)b), il existe  $S_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $S_n^n = S$ . Alors  $B_n^n = A$  avec  $B_n = \text{diag}(S_n, (0)) \square$

————— FIN —————