

Préambule:

1. Pour tout réel t , $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\frac{b(t)}{a(t)}y'(t) - \frac{c(t)}{a(t)}y(t) + \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$ car y est solution de (ε) et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

On a donc bien montré que Y est solution du système différentiel (S) : $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$

2. L'équation (ε_0) est une équation différentielle linéaire scalaire, homogène d'ordre 2, et tel que a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
D'après le cours, on peut donc affirmer que l'espace vectoriel des solutions de (ε_0) est de dimension 2.

3. W est solution de (S) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, W'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t)U'(t) + \lambda'(t)U(t) + \mu(t)V'(t) + \mu'(t)V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

Or u et v sont solutions de l'équation (ε_0) , donc $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} U(t)$

et de même $V'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} V(t)$

On a donc $\lambda(t)U'(t) + \mu(t)V'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} (\lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t)$

On peut donc écrire:

$$W \text{ est solution de (S)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} W(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{W \text{ est solution de (S)} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = H(t)}$

4. Il suffit de remplacer, dans l'équation $\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = H(t)$, U , V et H par leur définition, pour obtenir le

système vrai pour tout réel t :

$$\begin{cases} \lambda'(t)u(t) + \mu'(t)v(t) = 0 \\ \lambda'(t)u'(t) + \mu'(t)v'(t) = \frac{h(t)}{a(t)} \end{cases}$$

Partie I:

I.1.i. Si $t = 0$, la série converge car tous les termes de cette série sont nuls.

Si $t \neq 0$, appliquons le critère de d'Alembert pour des séries numériques: $\left| \frac{(-1)^{p+1} t^{2p+2}}{(-1)^p t^{2p}} \right| = t^2$, donc la série converge

si $t^2 < 1$, et diverge si $t^2 > 1$. Or $t^2 < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$, $t^2 > 1 \Leftrightarrow |t| > 1$, on peut donc en conclure :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum_{p \geq 0} (-1)^p t^{2p} \text{ est } 1.}$$

$$\forall t \in]-1, 1[, \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-t^2)^p = \boxed{\frac{1}{1+t^2}} \text{ car } \sum_{p=0}^{+\infty} (u)^p = \frac{1}{1-u} \text{ pour } u \in]-1, 1[$$

I.1.ii. De manière analogue à la question précédente, on montre que :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum_{p \geq 0} (-1)^p t^{2p+1} \text{ est } 1.}$$

$$\forall t \in]-1, 1[, \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = t \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} = \boxed{\frac{t}{1+t^2}}$$

$$\textbf{I.2. } \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = a \Leftrightarrow \boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = at + b}$$

I.3.a.i. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g: t \mapsto (1+t^2)f(t)$

On a alors, pour tout réel t :

- $g'(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$
- $g''(t) = (1+t^2)f''(t) + 4tf'(t) + 2f(t) = 0$ car f est une solution de (ε_h)

D'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{g \text{ est une fonction affine.}}$

I.3.a.ii. On a donc montré que si f est une solution de (ε_h) , alors $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{at+b}{1+t^2}$

Notons y_1 et y_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = \frac{1}{1+t^2}, y_2(t) = \frac{t}{1+t^2}$,

et (S_H) l'espace vectoriel des solutions de (ε_h) .

Nous avons donc prouvé que $(S_H) \subset Vect\{y_1, y_2\}$

De plus, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, car si α et β sont deux réels tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \text{ alors } \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\alpha + \beta t}{1 + t^2} = 0, \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}, \alpha + \beta t = 0, \text{ d'où } \alpha = \beta = 0$$

Comme de plus $\dim(S_H) = 2$ (d'après le cours car $(1 + t^2)$ ne s'annule jamais), on peut affirmer que :

$$\boxed{(S_H) = \text{Vect}\{y_1 y_2\} \text{ et } \{y_1 y_2\} \text{ est une base de } (S_H)}$$

I.3.b.i. Notons R le rayon de convergence de la série cherchée.

$$\forall t \in]-R, R[, y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}, y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

En reportant dans l'équation (ε_h) , on obtient:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n t^n = 0 \quad (*)$$

Effectuons le changement d'indice $p = n - 2$ dans la première somme,

$$\text{on a alors } \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2)(p+1) a_{p+2} t^p$$

On regroupe alors tous les termes de $(*)$ dans une même somme, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n(n-1) + 4n + 2) a_n) t^n = 0$$

Une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n(n-1) + 4n + 2) a_n = 0$$

Or $n(n-1) + 4n + 2 = n^2 + 3n + 2$, trinôme qui admet -1 et -2 pour racines.

Donc $n(n-1) + 4n + 2 = (n+1)(n+2)$, qui est non nul pour tout entier naturel n .

$$\text{On a donc: } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} + a_n = 0}$$

I.3.b.ii. On montre, par récurrence que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = (-1)^p a_0 \text{ et } a_{2p+1} = (-1)^p a_1}$

- les formules sont évidentes pour $p=0$

- supposons les formules vraies à un certain rang p , et montrons les au rang $p+1$.

En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a

$$a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = -a_{2p} = (-1)^{p+1}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = -a_{2p+1} = (-1)^{p+1}a_1$$

ce qui achève la récurrence.

I.3.b.iii. $\forall t \in]-\mathbb{R}, \mathbb{R}[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p a_1 t^{2p+1} = \boxed{a_0 \frac{1}{1+t^2} + a_1 \frac{t}{1+t^2}}$ d'après la question **I.1.**

I.4.a. D'après la question 4. du préambule, avec ici pour tout réel t :

$$u(t) = \frac{1}{1+t^2}, v(t) = \frac{t}{1+t^2}, h(t) = \frac{1}{1+t^2}, a(t) = 1+t^2, \text{ et donc } u'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}, v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2},$$

on peut donc écrire le système:
$$\begin{cases} \frac{1}{1+t^2} \lambda'(t) + \frac{t}{1+t^2} \mu'(t) = 0 \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \lambda'(t) + \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \mu'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{cases} \quad (S)$$

I.4.b. $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) + t\mu'(t) = 0 \\ -2t\lambda'(t) + (1-t^2)\mu'(t) = 1 \end{cases}$ car pour tout réel t , $1+t^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) = -t\mu'(t) \\ (1+t^2)\mu'(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}}$$

I.4.c. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + a \\ \mu(t) = \text{Arctan}(t) + b \end{cases}}$

I.4.d. D'après le résultat établi dans le préambule, la solution générale de (ε) est $y(t) = \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$, c'est-à-dire

ici: $\boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \frac{t \text{Arctan}(t)}{1+t^2}}$

Partie II:

II.1. Soit n un entier naturel non nul.

$$\varphi(n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1-2t}{1+t^2} dt = [\text{Arctan}(t) - \ln(1+t^2)]_0^{\frac{1}{n}}, \text{ d'où } \boxed{\varphi(n) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

II.2.

Si g est de classe C^p sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors $\forall x \in I$:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p + o_{x_0}((x - x_0)^p) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} g^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^p)$$

II.3. On utilise le développement limité usuel de la fonction $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^p + o_0(u^p) = \sum_{k=0}^p u^k + o_0(u^p)$$

En remplaçant u par $(-x^2)$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^p x^{2p} + o_0(x^{2p}) = \sum_{k=0}^p (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2p})$$

On primitive alors ce développement limité pour obtenir (en utilisant $\text{Arctan}(0)=0$) :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2p+1})$$

II.4. On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$

Cette fonction est donc constante sur $]0, +\infty[$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, on peut conclure que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

II.5. $\cos(\varphi(n) + \psi(n) + 2\ln(n)) = \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \text{Arctan}(n) - \ln(1 + n^2) + 2\ln(n)\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \ln(1 + n^2) - \ln(1 + n^2) + \ln(n^2)\right)$$

$$= \sin\left(2\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right) \text{ après simplification dans les logarithmes népériens.}$$

$$= \sin\left(2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \quad \text{car } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$$

$$= \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad \text{car } \sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o_0(u^4)$$

On a donc $n^4 (\cos(\varphi(n)) + \psi(n) + 2\ln(n)) - \frac{2}{n^2} = -1 + o_{+\infty}(1)$, qui tend vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$.

A partir d'un certain rang, cette quantité sera par exemple, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\beta = 2$.

On peut donc affirmer : $\exists \beta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |n^4 (\cos(\varphi(n)) + \psi(n) + 2\ln(n)) - \frac{2}{n^2}| \leq \beta$. (On a donc $\alpha=2$)

II.6. En reprenant le développements asymptotiques déterminé à la question précédente, on peut donc affirmer qu'au voisinage de $+\infty$, $\cos(\varphi(n)) + \psi(n) + 2\ln(n)$ est équivalent à $\frac{2}{n^2}$.

Ces deux expressions ont donc même signe au voisinage de $+\infty$, donc au voisinage de $+\infty$, la série

$\sum_{n>0} \cos(\varphi(n)) + \psi(n) + 2\ln(n)$ est à termes positifs, et converge d'après le critère de l'équivalent avec la série

de Riemann $\sum_{n>0} \frac{2}{n^2}$

II.7. Pour tout entier n non nul, $\cos(\varphi(n)) = \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$, qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

La série $\sum_{n>0} \cos(\varphi(n))$ diverge grossièrement.

Partie III:

III.1. Pour tout réel x , $\Phi(x) = \text{Arctan}(x)$, et la fonction Arctan est d'après le cours définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.a.b. Toujours d'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -\frac{\pi}{2}$. Pour la suite, on a donc $\ell = \frac{\pi}{2}$.

III.3. Soient X et Y deux réels.

$$\begin{aligned} & \int_X^Y (\Phi(t+a) - \Phi(t+b)) dt - \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt + \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt \\ &= \int_{X+b-a}^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - \int_X^Y \Phi(t+b) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles.} \\ &= \int_X^Y \Phi(u+b) du - \int_X^Y \Phi(t+b) dt \quad \text{grâce au changement de variable } u = t+a-b \text{ dans la première intégrale.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien montré que $\int_X^Y (\Phi(t+a) - \Phi(t+b)) dt = \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt - \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt$

III.4. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t+a) - \frac{\pi}{2} = 0$, donc par définition de la limite, si ε est un réel strictement positif fixé, on peut affirmer

qu'il existe un réel Y_0 tel que : $t \geq Y_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$

III.5. Si $Y \geq Y_0$, on a alors:

$$|\int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - (b-a) \frac{\pi}{2}| = |\int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - \int_Y^{Y+b-a} \frac{\pi}{2} dt| = |\int_Y^{Y+b-a} (\Phi(t+a) - \frac{\pi}{2}) dt|$$

$$\text{Or d'après l'inégalité de la moyenne, } |\int_Y^{Y+b-a} (\Phi(t+a) - \frac{\pi}{2}) dt| \leq \int_Y^{Y+b-a} |\Phi(t+a) - \frac{\pi}{2}| dt$$

De plus, puisque $Y \geq Y_0$, on peut dire que $\forall t \in [Y; Y+b-a], |\Phi(t+a) - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$

On a donc finalement $|\int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - (b-a) \frac{\pi}{2}| \leq \int_Y^{Y+b-a} \varepsilon dt$, c'est-à-dire:

$$|\int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - (b-a) \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon(b-a)$$

III.6. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t+a) + \frac{\pi}{2} = 0$, donc par définition de la limite, si ε est un réel strictement positif fixé, on peut affirmer

qu'il existe un réel X_0 tel que : $t \leq X_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) + \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$

III.7. Grâce à la question **III.5.**, nous avons donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Y_0 \in \mathbb{R}, Y \geq Y_0 \Rightarrow |\frac{1}{b-a} \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt - \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$$

Ceci est exactement la définition de $\lim_{Y \rightarrow +\infty} (\frac{1}{b-a} \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt) = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{c'est-à-dire } \lim_{Y \rightarrow +\infty} \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt = (b-a) \frac{\pi}{2}$$

De la même façon, grâce à la question **III.6.**, $\forall \varepsilon > 0, \exists X_0 \in \mathbb{R}, X \leq X_0 \Rightarrow |\frac{1}{b-a} \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt + \frac{\pi}{2}| \leq \varepsilon$

Ceci prouve que $\lim_{X \rightarrow -\infty} (\frac{1}{b-a} \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt) = -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt = -(b-a) \frac{\pi}{2}$

On passe alors à la limite lorsque X tend vers $-\infty$ et lorsque Y tend vers $+\infty$ dans l'égalité:

$$\int_X^Y (\Phi(t+a) - \Phi(t+b)) dt = \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a) dt - \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a) dt, \text{ d'où:}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(t+a) - \Phi(t+b)) dt = -\pi(b-a)$$

III.8.a. Soit $X \in \mathbb{R}^+$

On applique alors le résultat établi à la question III.3. avec $Y = 0$, $a = 0$ et $b = 1$.

$$\text{On a alors: } \boxed{\int_0^X (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt = \int_X^{X+1} \Phi(t) dt - \int_0^1 \Phi(t) dt}$$

III.8.b.

$$\int_0^1 \Phi(t) dt = \int_0^1 \text{Arctan}(t) dt = [t \text{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \quad \text{grâce à une intégration par parties}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1, \text{ d'où finalement } \boxed{\int_0^1 \Phi(t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$

III.8.c. Il s'agit exactement de la définition de $\lim_{X \rightarrow +\infty} \Phi(X) = \frac{\pi}{2}$

III.8.d. D'après les questions **III.8.a.** et **III.8.b.**, on a donc $\int_0^X (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt = \int_X^{X+1} \Phi(t) dt - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} (*)$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists X_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que si $X \geq X_1$, alors :

$$\left| \int_X^{X+1} \Phi(t) dt - \frac{\pi}{2} \right| = \left| \int_X^{X+1} \left(\Phi(t) - \frac{\pi}{2} \right) dt \right| \leq \int_X^{X+1} \left| \Phi(t) - \frac{\pi}{2} \right| dt \leq \int_X^{X+1} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Nous venons de prouver que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{X+1} \Phi(t) dt = \frac{\pi}{2}$

Finalement, en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on a donc:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}$$

III.9. Soit k un entier naturel fixé, et soit t un réel de l'intervalle $[k, k+1]$.

Appliquons le **théorème des accroissements finis** à la fonction $\Phi = \text{Arctan}$ entre t et $t+1$ (cette fonction étant infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$): $\exists c \in]t; t+1[$, $\Phi(t+1) - \Phi(t) = \Phi'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

$$\text{Or } c \in]t; t+1[\Rightarrow c \in]k; k+2[\Rightarrow \frac{1}{(k+2)^2+1} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{1}{k^2+1}$$

Donc par croissance de l'intégrale, on a donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+2)^2+1} dt \leq \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2+1} dt$, c'est-à-dire

$$\text{finalement } \boxed{\frac{1}{(k+2)^2+1} \leq \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt \leq \frac{1}{k^2+1}}$$

III.10. D'après la question **III.8.d.**, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt$ est bien convergente vers $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

Pour tout entier naturel N, on peut écrire:

$$\sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt = \int_0^{N+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt \quad \text{tend vers } \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \text{ lorsque } N \text{ tend vers } +\infty.$$

Donc la série $\sum_{k \geq 0} \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt = \int_0^{+\infty} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt}$$

III.11. En utilisant la question **III.9.**, on en déduit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)^2+1} \leq \int_0^{+\infty} (\Phi(t+1) - \Phi(t)) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}}$$

Remarque: ces deux séries sont bien convergentes car leur terme généraux respectifs sont positifs et équivalents aux termes généraux de séries de Riemann convergentes.