

**Partie I:**

**1.(a)** La droite (OI) a pour équation  $y = 0$ , la droite (OJ) a pour équation  $x = 0$ , et la droite (IJ) a pour équation  $x + y - 1 = 0$ , donc d'après la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite du plan, si M est un point du plan de coordonnées (x,y):

$d(M, (OI)) = |y|, d(M, (OJ)) = |x|, d(M, (IJ)) = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

**1.(b)**  $M(x,y) \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x+y-1)^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0$

**1.(c)** Nous allons réduire la forme quadratique de  $\mathbb{R}^2$  définie par  $q(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$

La matrice de cette forme quadratique dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est  $P_A(X) = X^2 - 2X + \frac{8}{9} = \left(X - \frac{4}{3}\right)\left(X - \frac{2}{3}\right)$

Le spectre de A est  $Sp(A) = \left\{ \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right\}$ . Déterminons les sous espaces propres associés à ces deux valeurs propres:

On obtient facilement  $Ker\left(A - \frac{4}{3}I_2\right) = Vect\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ , et  $Ker\left(A - \frac{2}{3}I_2\right) = Vect\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

En posant  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , on a donc  $A = PDP^{-1}$ , avec  $D = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Soit  $(\vec{I}, \vec{J})$  la base de  $\mathbb{R}^2$  telle que P soit la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j})$  à  $(\vec{I}, \vec{J})$ .

La matrice P étant orthogonale, la base  $(\vec{I}, \vec{J})$  est orthonormée, et en utilisant les formules de changement de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ on a la relation: } q(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy = \frac{4}{3}X^2 + \frac{2}{3}Y^2$$

On peut donc dire que dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$ :

$$M(X,Y) \in (C) \Leftrightarrow \frac{4}{3}X^2 + \frac{2}{3}Y^2 - \frac{2}{3}(\sqrt{2}X) + \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(X - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2}{3}Y^2 = \frac{1}{18}$$

En posant  $\begin{cases} X' = X - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$ , ce qui revient à se placer dans le repère  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ ,

où  $\Omega$  est le point de coordonnées  $(X = \frac{1}{2\sqrt{2}}; Y = 0)$ , une équation réduite de (C) est donc  $\frac{X'^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{Y'^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1$

On reconnaît une ellipse de centre  $\Omega$ , de demi-petit axe  $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ , de demi grand-axe  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ . (attention ici le grand axe est selon l'axe des ordonnées dans le nouveau repère)

La distance entre l'origine et l'un des foyers est  $c = \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ , donc l'excentricité de cette ellipse est  $e = \frac{\frac{1}{2\sqrt{6}}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

, d'où  $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

### 1.(d)

La droite (OI) a pour équation  $y=0$  dans le repère  $(O, \vec{I}, \vec{J})$ , donc, en utilisant les formules de changement de repère définies à la question précédente, **dans le repère  $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ , la droite (OI) a pour équation  $X' - Y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$**

Déterminons l'intersection de la droite (OI) et de l'ellipse (C):

$$\begin{cases} X' - Y' - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \\ 24X'^2 + 12Y'^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = X' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 36X'^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}X' + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = X' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \left(6X' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X' = -\frac{1}{6\sqrt{2}} \\ Y' = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

L'ellipse et la droite (OI) ont donc un unique point d'intersection, le point  $M_0$  de coordonnées  $\begin{cases} X' = -\frac{1}{6\sqrt{2}} \\ Y' = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$

Vérifions que la tangente à l'ellipse en ce point est bien la droite (OI):

D'après le cours, on sait qu'au point  $M_0$ , une équation de la tangente est :

$$24\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)X' + 12\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)Y' = 1 \Leftrightarrow X' - Y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0. \text{ C'est la droite (OI)}$$

Nous avons donc prouvé que (C) est tangente à la droite (OI).

Par symétrie du problème par rapport à la 1<sup>ère</sup> bissectrice (les rôles de x et de y sont symétriques), on peut affirmer que (C) est également tangente à la droite (OJ).

**2.(a)** La tangente à  $(\varepsilon)$  au point P de paramètre  $\theta$  est dirigée par le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} -a\sin(\theta) \\ b\cos(\theta) \end{pmatrix}$  (car ce vecteur, vecteur dérivé du vecteur position, est toujours non nul).

La droite (ON) est dirigée par le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Ces deux droites sont parallèles} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -a\sin(\theta) & a\cos(t) \\ b\cos(\theta) & b\sin(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta)\sin(t) + \cos(\theta)\cos(t) = 0 \quad \text{car } ab \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\cos(t - \theta) = 0} \end{aligned}$$

**2.(b)** On suppose la condition  $\cos(t - \theta) = 0$  vérifiée.

L'aire du triangle ONP est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\overrightarrow{ON}$  et  $\overrightarrow{OP}$ , c'est-à-dire:

$$\text{Aire}(\text{triangle ONP}) = \frac{1}{2} |\text{Det}(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON})| = \frac{1}{2} |ab(\sin(t)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(t))| = \frac{ab}{2} |\sin(t - \theta)|$$

$$\text{Or } \cos(t - \theta) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, t - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow |\sin(t - \theta)| = 1$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\text{Aire}(\text{triangle ONP}) = \frac{ab}{2}}$$

**2.(c)** La droite  $\Delta$  est tangente à  $\varepsilon$  si et seulement si il existe un point de  $\varepsilon$  appartenant à  $\Delta$  tel que en ce point, le vecteur tangent à  $\varepsilon$  soit aussi un vecteur directeur de  $\Delta$ .

Traduisons analytiquement cette condition:

La droite  $\Delta$  est tangente à  $\varepsilon \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}$ , le point  $\begin{pmatrix} a\cos(w) \\ b\sin(w) \end{pmatrix}$  appartienne à  $\varepsilon$  **et** le vecteur  $\begin{pmatrix} -a\sin(w) \\ b\cos(w) \end{pmatrix}$  dirige  $\Delta$

$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}, \begin{cases} \alpha a \cos(w) + \beta b \sin(w) + \gamma = 0 \\ \beta b \cos(w) - \alpha a \sin(w) = 0 \end{cases}$$

Ce système d'inconnues  $(\cos(w), \sin(w))$  est un système de Cramer car son déterminant est égal à  $-a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 \neq 0$ , car  $a \neq 0, b \neq 0, (\alpha, \beta) \neq 0$ . En utilisant les formules de Cramer, on peut donc écrire:

$$\text{La droite } \Delta \text{ est tangente à } \varepsilon \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(w) = \frac{-a\alpha\gamma}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} \\ \sin(w) = \frac{-b\beta\gamma}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{-a\alpha\gamma}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} \right)^2 + \left( \frac{-b\beta\gamma}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2\alpha^2\gamma^2 + b^2\beta^2\gamma^2 = (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2\alpha^2\gamma^2 + b^2\beta^2\gamma^2 = (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \quad \text{car } a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases} \quad \text{car } a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \neq 0$$

On a donc bien prouvé: La droite  $\Delta$  est tangente à  $\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

**2.(d)** La droite (UV) a pour équation:

$$\begin{vmatrix} x - 2a\cos(u) & a\cos(v) - a\cos(u) \\ y - 2b\sin(u) & b\sin(v) - b\sin(u) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b(\sin(v) - \sin(u))x - a(\cos(v) - \cos(u))y + 2ab\sin(u - v) = 0$$

Posons  $\begin{cases} \alpha = b(\sin(v) - \sin(u)) \\ \beta = -a(\cos(v) - \cos(u)) \\ \gamma = 2ab\sin(u - v) \end{cases}$

Nous allons alors utiliser le résultat établi à la question précédente:

La droite (UV) est tangente à l'ellipse  $\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2b^2(\sin(v) - \sin(u))^2 + a^2b^2(\cos(v) - \cos(u))^2 - 4a^2b^2\sin^2(u - v) = 0 \\ 2ab\sin(u - v) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\cos(u - v) - 4\sin^2(u - v) = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0, b \neq 0, \text{ et } u \neq v[2\pi] \text{ (U et V sont distincts)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2(u - v) - \cos(u - v) - 1 = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2(u - v) - \cos(u - v) - 1 = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases} \quad \text{Or le polynôme } 2X^2 - X - 1 = 0 \text{ admet } 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \text{ pour racines.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(u - v) = 1 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \cos(u - v) = -\frac{1}{2} \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$$

Le premier système n'a pas de solutions car  $u \neq v[2\pi]$ , on peut donc énoncer:

La droite (UV) est tangente à l'ellipse  $\varepsilon \Leftrightarrow \cos(u - v) = -\frac{1}{2}$

**2.(e)** Notons a, b, c les paramètres respectifs des points A, B, C sur l'ellipse  $\varepsilon$ .

D'après la question précédente, la condition (AB) et (AC) sont tangentes à  $\varepsilon$  se traduit par 
$$\begin{cases} \cos(a-b) = -\frac{1}{2} \\ \cos(a-c) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrons que (BC) est tangente à  $\varepsilon$ , ce qui revient à montrer que  $\cos(b-c) = -\frac{1}{2}$ :

$$\cos(b-c) = \cos((b-a)+(a-c)) = \cos(b-a)\cos(a-c) - \sin(b-a)\sin(a-c)$$

Comme  $\cos(a-b) = -\frac{1}{2}$ , il ya deux possibilités pour la valeur de  $\sin(a-b)$ :  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , de même pour  $\sin(a-c)$

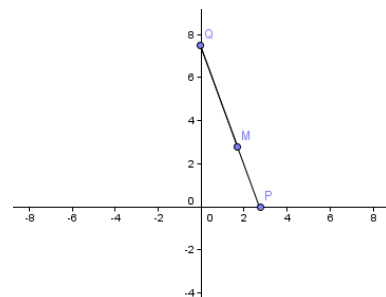
Nous avons donc les deux possibilités suivantes:  $\cos(b-c) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$  ou  $\cos(b-c) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

Le premier cas est impossible car on aurait  $b = c[2\pi]$ , ce qui est exclu car les points B et C sont distincts.

Nous avons donc bien montré que la droite(BC) est tangente à  $\varepsilon$ .

**3.i.** Si D est une droite du plan affine, si  $\alpha$  est un réel non nul, on appelle affinité orthogonale de base D et de rapport  $\alpha$  l'application  $f$  qui à tout point M du plan associe le point M' tel que  $p(\overrightarrow{MM'}) = \alpha p(\overrightarrow{MM})$ , où p désigne la projection orthogonale sur D.

**3.ii. Remarque personnelle:** ici il est difficile de savoir si l'énoncé attend seulement un exemple de trois points M, P, Q (dessin ci-contre) vérifiant les hypothèses, ou s'il s'agit d'esquisser le lieu des points M en prenant plusieurs exemples.



**3.iii.** Si on note (t,0) les coordonnées du point P, (0,u) les coordonnées du point Q, alors la condition PQ = 8 se traduit par

$$t^2 + u^2 = 64, \text{ c'est-à-dire } \left(\frac{t}{8}\right)^2 + \left(\frac{u}{8}\right)^2 = 1, \text{ donc il existe } \theta \text{ réel tel que } P(8\cos(\theta), 0) \text{ et } Q(0, 8\sin(\theta))$$

Le point M(x,y) étant défini par la relation  $\overrightarrow{PM} = \frac{3}{8} \overrightarrow{PQ}$ , on a donc 
$$\begin{cases} x - 8\cos(t) = \frac{3}{8}(-8\cos(t)) \\ y = \frac{3}{8}(8\sin(t)) \end{cases},$$

d'où M:  $\begin{cases} x = 5\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ . L'ensemble ( $\varepsilon$ ) cherché est donc une ellipse.

## Partie II:

### 1.

- Intersection de P avec le plan d'équation  $x = 0$ :

Les points de cette intersection sont les points  $M(x,y,z)$  tels que  $\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y^2 \end{cases}$  C'est une parabole.

- Intersection de P avec le plan d'équation  $y = 0$ :

Les points de cette intersection sont les points  $M(x,y,z)$  tels que  $\begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$  C'est une parabole.

- Intersection de P avec le plan d'équation  $z = 0$ :

Les points de cette intersection sont les points  $M(x,y,z)$  tels que  $\begin{cases} z = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$

C'est la réunion de deux droites sécantes.

- Intersection de P avec le plan d'équation  $z = 1$ :

Les points de cette intersection sont les points  $M(x,y,z)$  tels que  $\begin{cases} z = 1 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$  C'est une hyperbole.

2. D'après le cours, on peut directement affirmer que P est un paraboloïde hyperbolique.

3.  $M_0$  appartenant à P, on a la relation  $z_0 = x_0^2 - y_0^2$

On cherche s'il existe un vecteur  $\vec{u}$  non nul de coordonnées  $(a,b,c)$  tels que :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , le point  $M_0 + \lambda \vec{u} \in P$ .

Cette dernière condition peut aussi s'écrire:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, M_0 + \lambda \vec{u} \in P \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, (x_0 + \lambda a)^2 - (y_0 + \lambda b)^2 = z_0 + \lambda c$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2(a^2 - b^2) + \lambda(2ax_0 - 2by_0 - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ax_0 - 2by_0 - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2(x_0 - y_0)a \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -b \\ c = 2(x_0 + y_0)a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(x_0 - y_0) \end{pmatrix} \right\} \text{ ou } \vec{u} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2(x_0 + y_0) \end{pmatrix} \right\}$$

Il y a donc deux droites qui conviennent, c'est-à-dire qui passent par  $M_0$  et sont incluses dans P,

ce sont les droites de vecteur directeur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(x_0 - y_0) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2(x_0 + y_0) \end{pmatrix}$

**4.** Les deux droites trouvées ci-dessus sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, ce qui se traduit par la condition  $x_0^2 - y_0^2 = 0$ .

Ayant de plus la relation  $z_0 = x_0^2 - y_0^2$ , on peut affirmer que l'ensemble des points  $M_0$  de P par lesquels passent deux droites orthogonales et incluses dans P est  $\left\{ M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0 \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0 \in \mathbb{R} \right\}$ ,

c'est-à-dire la réunion des deux droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs respectifs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**5.** Une représentation paramétrique de la droite D est  $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases}$ , donc cette droite passe par le point  $A(0, 0, -\frac{1}{4})$  et est

dirigée par  $\vec{T}(1, 0, 0)$ . On utilise alors la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite de l'espace:

Si  $M(x, y, z)$ , alors  $d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$ , d'où après calculs  $d(M, D) = \sqrt{\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2}$

De la même manière la droite D' passe par le point  $B(0, 0, \frac{1}{4})$  et est dirigée par  $\vec{J}(0, 1, 0)$ , donc  $d(M, D') = \sqrt{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2}$

$M(x, y, z)$  est équidistants des droites D et D'  $\Leftrightarrow \sqrt{\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2}$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow z = x^2 - y^2. \quad \boxed{\text{Il s'agit du paraboloïde hyperbolique P}}$$

### **Partie III:**

**1.** Montrons que tr est une application linéaire. (c'est une propriété vue en cours qu'on nous demande de démontrer ici)

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$tr(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + \lambda tr(B), \text{ ce qui prouve bien } \boxed{\text{la linéarité de l'application "trace"}}$$

**2.** L'application tr est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , donc  $\text{Im}(tr)$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}$ .

Il est donc de dimension 0 ou 1.

Il ne peut pas être de dimension 0 (car cela signifierait que toutes les matrices sont de trace nulle, ce qui est faux en considérant par exemple la matrice identité), donc il est de dimension 1, c'est-à-dire  $\boxed{\text{Im}(tr) = \mathbb{R}}$  (ce qui traduit la surjectivité de l'application  $tr$ )

D'après le théorème du rang,  $\dim(M_n(\mathbb{R})) = \dim(Ker(tr)) + \dim(\text{Im}(tr))$ , donc  $\boxed{\dim(Ker(tr)) = n^2 - 1}$

**3.** Montrons tout d'abord que  $\text{Vect}(I_n) \cap Ker(tr) = \{O\}$  (O désignant ici la matrice nulle)

Il est clair que la matrice nulle appartient à la fois à  $\text{Vect}(I_n)$  et à  $Ker(tr)$ , montrons l'inclusion réciproque:

Soit  $A \in \text{Vect}(I_n) \cap Ker(tr)$ , alors  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, A = \alpha I_n$  et  $tr(A) = 0$ ; or  $tr(A) = n\alpha$ , donc comme  $n \neq 0$ ,  $\alpha = 0$  et  $A = O$ .

Nous avons bien montré que  $\boxed{\text{Vect}(I_n) \cap Ker(tr) = \{O\}}$

De plus, nous avons la formule:  $\dim(\text{Vect}(I_n) + Ker(tr)) = \dim(\text{Vect}(I_n)) + \dim(Ker(tr)) - \dim(\text{Vect}(I_n) \cap Ker(tr))$

$$= 1 + (n^2 - 1) - 0 = n^2$$

Donc  $\dim(\text{Vect}(I_n) + Ker(tr)) = \dim(M_n(\mathbb{R}))$ , et  $\text{Vect}(I_n) + Ker(tr)$  est un sous espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ , donc

$$\boxed{\text{Vect}(I_n) + Ker(tr) = M_n(\mathbb{R})}$$

Nous avons donc bien prouvé que  $\boxed{\text{Vect}(I_n) \oplus Ker(tr) = M_n(\mathbb{R})}$

**4.** Il s'agit ici d'un résultat du cours que l'on nous demande de démontrer.

Notons  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  les deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Notons également  $B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ,  $BA = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

On a donc, pour tous les entiers  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ :  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  et  $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

On échange les lettres  $k$  et  $i$

$$tr(BA) = \sum_{i=1}^n d_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}, \text{ donc } \boxed{tr(BA) = tr(AB)}$$

**5.** Si de telles matrices A et B existent, alors on aurait  $tr(AB - BA) = tr(I_n)$ , d'où en utilisant les questions 1. et 4.,  $0 = n$ , ce qui est absurde. Il n'existe donc aucunes matrices A et B de  $M_n(\mathbb{R})$  telles que  $AB - BA = I_n$ .

**6.(a)** Tout d'abord il est clair que l'application  $\psi_J$  est à valeurs dans  $M_n(\mathbb{R})$

Montrons maintenant sa linéarité: soit M et N deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\psi_J(M + \lambda N) &= (M + \lambda N) + tr(M + \lambda N)J \\ &= M + tr(M)J + \lambda N + \lambda tr(N)J \quad \text{par linéarité de l'application trace.} \\ &= \psi_J(M) + \lambda \psi_J(N)\end{aligned}$$

On a bien prouvé que  $\psi_J$  est un endomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**6.(b)** Supposons que  $\lambda$  soit une valeur propre et M un vecteur propre associé (M est une matrice non nulle de  $M_n(\mathbb{R})$ )

On a alors  $M + tr(M)I_n = \lambda M$ , d'où en prenant la trace:  $tr(M) + tr(M)n = \lambda tr(M) \Leftrightarrow (\lambda - n - 1)tr(M) = 0$

Donc soit  $tr(M) = 0$ , soit  $\lambda = n + 1$

Dans le cas où  $tr(M) = 0$ , cherchons les valeurs propres pouvant être associées à cette matrice: on a alors  $\psi_{I_n}(M) = \lambda M$ , c'est-à-dire  $M = \lambda M$ , d'où  $\lambda = 1$  car M est non nulle.

**Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 et  $(n + 1)$ .**

Vérifions qu'effectivement ce sont bien des valeurs propres, et en même temps nous déterminerons les sous espaces propres associés:

- Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que  $\psi_{I_n}(M) = M$   
 $\psi_{I_n}(M) = M \Leftrightarrow M + tr(M)I_n = M \Leftrightarrow tr(M)I_n = 0 \Leftrightarrow tr(M) = 0 \Leftrightarrow M \in Ker(tr)$   
Donc 1 est valeur propre, de sous espace propre associé  $Ker(tr)$
- Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que  $\psi_{I_n}(M) = (n + 1)M$   
 $\psi_{I_n}(M) = (n + 1)M \Leftrightarrow M + tr(M)I_n = (n + 1)M \Leftrightarrow M = \frac{tr(M)}{n} I_n \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha I_n$   
Donc (n+1) est valeur propre, de sous espace propre associé  $Vect(I_n)$

Nous avons déjà prouvé que  $dim(Ker(tr)) + dim(Vect(I_n)) = dim(M_n(\mathbb{R}))$ ,

donc l'endomorphisme  $\psi_{I_n}$  est diagonalisable.

**6.(c)** Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .

$$((\psi_J)^2 - 2\psi_J + Id)(M) = \psi_J(\psi_J(M)) - 2\psi_J(M) + M$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_J(M + \text{tr}(M)J) - 2M - 2\text{tr}(M)J + M \\
&= M + \text{tr}(M)J + \text{tr}(M)(J + \text{tr}(J)J) - M - 2\text{tr}(M)J \\
&= \text{tr}(M)\text{tr}(J)J
\end{aligned}$$

**6.(d)** Supposons que  $\lambda$  soit une valeur propre et  $M$  un vecteur propre associée ( $M$  est une matrice non nulle de  $M_n(\mathbb{R})$ )

On a alors  $M + \text{tr}(M)J = \lambda M$ , d'où en prenant la trace:  $\text{tr}(M) + \text{tr}(M)\text{tr}(J) = \lambda \text{tr}(M) \Leftrightarrow (\lambda - \text{tr}(J) - 1)\text{tr}(M) = 0$

Donc soit  $\text{tr}(M) = 0$ , soit  $\lambda = \text{tr}(J) + 1$

Dans le cas où  $\text{tr}(M) = 0$ , cherchons les valeurs propres pouvant être associées à cette matrice: on a alors  $\psi_J(M) = \lambda M$ , c'est-à-dire  $M = \lambda M$ , d'où  $\lambda = 1$  car  $M$  est non nulle.

**Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 et  $\text{tr}(J)+1$**

Vérifions qu'effectivement ce sont bien des valeurs propres, et en même temps nous déterminerons les sous espaces propres associés:

- Montrons qu'il existe des matrices  $M$  non nulles telles que  $\psi_J(M) = M$   
 $\psi_J(M) = M \Leftrightarrow M + \text{tr}(M)J = M \Leftrightarrow \text{tr}(M)J = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow M \in \text{Ker}(\text{tr})$   
Donc 1 est valeur propre, de sous espace propre associé  $\text{Ker}(\text{tr})$
- Supposons à présent que  $\text{tr}(J) \neq 0$  (car si  $\text{tr}(J) = 0$ , 1 est alors la seule valeur propre)  
Montrons qu'il existe des matrices  $M$  non nulles telles que  $\psi_J(M) = (\text{tr}(J) + 1)M$   
 $\psi_J(M) = (\text{tr}(J) + 1)M \Leftrightarrow M + \text{tr}(M)J = (\text{tr}(J) + 1)M \Leftrightarrow M = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(J)} J \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(J)$   
(pour la dernière équivalence, le sens direct est évident, et réciproquement si  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha J$ , alors  $\text{tr}(M) = \alpha \text{tr}(J)$ , donc  $\alpha = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(J)}$ , et  $M = \frac{\text{tr}(M)}{\text{tr}(J)} J$ )  
Donc  $(\text{tr}(J)+1)$  est valeur propre, de sous espace propre associé  $\text{Vect}(J)$

Bilan:

- Si  $\text{tr}(J) = 0$ , 1 est la seule valeur propre de  $\psi_J$
  - Si  $\text{tr}(J) \neq 0$ , 1 et  $\text{tr}(J)+1$  sont les deux valeurs propres de  $\psi_J$

**6.(e)**

- **Si  $\text{tr}(J)=0$** , 1 est la seule valeur propre de  $\psi_J$ , et le sous espace propre associé est  $\text{Ker}(\text{tr})$ , qui est de dimension  $n^2 - 1 \neq n^2$ , donc l'endomorphisme  $\psi_J$  n'est pas diagonalisable.
- **Si  $\text{tr}(J) \neq 0$** , le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est  $\text{Ker}(\text{tr})$ , le sous espace propre associé à la valeur propre  $\text{tr}(J)+1$  est  $\text{Vect}(J)$  de dimension 1, donc  $\dim(\text{Ker}(\text{tr})) + \dim(\text{Vect}(J)) = \dim(M_n(\mathbb{R}))$ , donc l'endomorphisme  $\psi_J$  est diagonalisable.