

CCINP Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Jérémy Larochette – Lycée Carnot – Dijon

Mai 2021

EXERCICE I

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in]0, 1] \mapsto t^{2k} \ln t$. C'est une fonction continue sur $]0, 1]$ et $|f_k(t)| = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ car $t^{2k+1/2} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 0 par croissances comparées.

Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, f_k est intégrable sur $]0, 1]$.

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et \ln étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$,

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2k} \ln t \, dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2k+1} \int_{\varepsilon}^1 t^{2k} \, dt = -\frac{\varepsilon^{2k+1} \ln \varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2} (1 - \varepsilon^{2k+1}).$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 et par croissances comparées, $\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Q2. f est continue et positive sur $]0, 1[$ et, de nouveau, $f(t) = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ car $\sqrt{t} f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{}$ 0 donc par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$.

Puis $f(t) = \frac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{t-1}{2(t-1)} = \frac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{}$ $\frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, 1[$.

Puis, pour $t \in]0, 1[$, $t^2 \in]-1, 1[$ donc $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\int_0^1 f(t) \, dt = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} \ln t \, dt = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \, dt$.

Justifions l'interversion série intégrale par le théorème de convergence N_1 :

H1. La série de fonction $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ qui est continue sur $]0, 1[$.

H2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable sur $]0, 1[$ d'après la question **Q1** car négative et d'intégrale convergente.

H3. Avec **Q1**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_k(t)| \, dt = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$ avec $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente en tant que série de

Riemann avec $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \int_0^1 |f_k(t)| \, dt$ converge.

On a alors $\int_0^1 f(t) \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).

Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\int_0^1 f(t) \, dt = \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ et finalement } \int_0^1 f(t) \, dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

EXERCICE II

Q3. \ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \leq 0$ donc \ln est concave sur $]0, +\infty[$.

L'inégalité de Jensen appliquée à $a, b, c \in]0, +\infty[$ avec des poids tous égaux à $\frac{1}{3}$ donne alors

$$\ln \frac{a+b+c}{3} \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

donc, par croissance de l'exponentielle, $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Q4. f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$ par opérations et pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{1}{y^2 x}.$$

Les points critiques sont donc les points $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ vérifiant $x^2 y = xy^2 = 1$ soit $x = y$ et $xy^2 = 1$: il y a un unique point critique, $(1, 1)$.

On calcule $f(1, 1) = 3$ et en appliquant la **Q3**, on a pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $f(x, y) \geq 3 \sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{xy}} = 3 = f(1, 1)$.

Donc f présente un minimum global en $(1, 1)$ qui vaut 3.

PROBLÈME

Partie I

Q5. `def factorielle(n) :`

```
fact = 1
for i in range(2, n + 1):
    fact *= i
return fact
```

ou bien, récursivement,

```
def factorielle(n) :
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorielle(n - 1)
```

Q6. $\binom{30}{10} = \frac{30!}{10! 20!}$ ce qui représente $30 + 10 + 20 + 1 = 61$ multiplications (ce que semble attendre le sujet vu ce qui suit même si ma première version de `factorielle(n)` n'effectue que $n - 1$ multiplications pour $n \geq 2$).

En remarquant que $\binom{30}{10} = \frac{30 \times 29 \times \dots \times 21}{10!}$, on ramène le nombre de multiplications à 20 (ou, plus exactement, à 17).

Enfin, si on remplace `/` par `//`, on obtient un résultat de type `float`.

Q7. Soit $n \geq p \geq 1$.

1^{re} méthode $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!}$ donc $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

2^e méthode On dénombre les couples (k, A) où A partie à p éléments de E de cardinal n et $k \in A$ de deux manières différentes :

- soit on choisit d'abord k dans E puis $A \setminus \{k\}$ partie à $p - 1$ éléments de $E \setminus \{k\}$ ce qui donne $n \binom{n-1}{p-1}$ couples possibles,
- soit on choisit d'abord A puis k élément de A ce qui donne $\binom{n}{p} p$ couples possibles.

Et donc, finalement, $n \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p} p$.

```
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p    # Attention à la position du // p !!!
```

Ce n'est pas demandé dans le sujet, mais on peut optimiser le calcul en remarquant que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$:

```
def binom_rec(n, p):
    if not (0 <= p <= n):
        return 0
    if p in (0, n):
        return 1
    if n - p < p:
        return binom_rec(n, n - p)
    return n * binom_rec(n - 1, p - 1) // p
```

Q8.

```
def bernoulli(n):
    b = [1] # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        b.append(-sum(binomial(p + 1, k) * b[k] for k in range(p)) / (p + 1))
        # On calcule b_p et on l'ajoute à sa place, au bout de b.
    return b[-1]
```

Si l'on ne souhaite pas utiliser sum :

```
def bernoulli(n):
    b = [1] # b[k] vaut b_k
    for p in range(1, n + 1):
        bp = 0
        for k in range(p):
            bp += binomial(p + 1, k) * b[k]
        b.append(-bp / (p + 1))
    return b[-1]
```

Partie II

Q9. Soit $a > 1$ et $\gamma \in]1, a[$. Comme $0 \leq \frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ car, par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n^{a-\gamma}} \rightarrow 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs,

$$\boxed{\sum \frac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$$

Q10. H1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto e^{-x \ln n}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$, et $f'_n : x \mapsto -\frac{\ln n}{n^x}$.

H2. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme série de Riemann convergente.

H3. Soit $a > 1$. Pour tout $x \geq a$, $|f'_n(x)| = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, indépendant de x .

Donc $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Ainsi, par théorème de transfert de classe \mathcal{C}^1 , $\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[}$ et $\zeta' : x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \leq 0$ donc

$$\boxed{\zeta \text{ décroît.}}$$

Q11. Si $\sum f_n$ convergerait uniformément sur $]1, +\infty[$, le théorème de la double limite s'appliquerait au voisinage de 1 et en particulier $\sum \lim_{1^+} f_n = \sum \frac{1}{n}$ convergerait ce qui est contradictoire.

$$\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1, +\infty[.$$

Q12. Par contre $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[2, +\infty[$ car si $x \geq 2$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$ terme général de série convergente indépendant de x .

Le théorème de la double limite peut donc s'appliquer, avec $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \delta_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,1} = 1.$$

Q13. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x > 1$, $I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1$.

Or $I(x) = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$, donc $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$ et $1 \leq (x-1)\zeta(x) \leq 1 + (x-1)$ donc

$(x-1)\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ par encadrement et enfin $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Q14. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n .

$\left(\frac{1}{(ab)^x} \right)_{(a,b) \in A} = \left(\frac{1}{a^x} \times \frac{1}{b^x} \right)_{(a,b) \in A}$ est une « suite double produit » **sommable** car les séries $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{a^x}$ et $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire

de somme $\zeta(x)^2$. En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{b \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum_{a \in \mathbb{N}^*} \frac{\zeta(x)}{a^x}$

converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n = \{(a, b) \in A, ab = n\}$, et alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$ et les A_n sont deux à deux disjoints.

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b) \in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b) \in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a, b) \in \mathbb{N}_*^2, n = ab\}| = \left| \left\{ \left(a, \frac{n}{a} \right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n \right\} \right| = d_n$.

Finalement, $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$.

Partie III

Q15. Comme $(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak)$, on a par σ -additivité,

$$P(X \in a\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)a^s k^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)a^s}$$

donc $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^s}$.

Q16. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a directement que si a_1, \dots, a_n divise N , alors chacun des a_i divise N sans hypothèse de primalité relative.

On montre l'autre sens par récurrence simple. Soit, pour $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$: « Si a_1, \dots, a_n sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux, alors $a_1 \cdots a_n$ divise N . ».

— Pour $n = 2$, montrons que $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée. Soient a_1 et a_2 des diviseurs de n premiers entre eux. On a $k \in \mathbb{N}$ tel que a_2 divise $N = a_1 k$. Comme $a_1 \wedge a_2 = 1$, par lemme de Gauß, a_2 divise k donc $a_1 a_2$ divise N .

— Soit un $n \geq 2$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soient a_1, \dots, a_{n+1} des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux.

Comme a_1, \dots, a_n sont des diviseurs de N deux à deux premiers entre eux, par hypothèse de récurrence, $a_1 \cdots a_n$ divise N .

Mais $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont premiers entre eux : en effet, aucun des a_i pour i entre 1 et n n'a de diviseur premier en commun avec a_{n+1} donc $a_1 \cdots a_n$ ne peut en avoir lui aussi.

Ainsi, $a_1 \cdots a_n$ et a_{n+1} sont deux diviseurs premiers entre eux de N , donc d'après le cas $n = 2$, $a_1 \cdots a_{n+1}$ divise N , ce qui établit la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{si } a_1, \dots, a_n \text{ sont premiers entre eux deux à deux, ils divisent } N \text{ si et seulement leur produit divise } N.}$

Le résultat n'est plus valable si on suppose seulement a_1, \dots, a_n premiers entre eux dans leur ensemble comme on le voit avec le contre-exemple : $\boxed{6, 10, 15}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble (aucun diviseur premier en commun) mais pas deux à deux, ils divisent tous 30, mais pas leur produit.

Q17. Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux deux à deux, et (b_1, \dots, b_r) une sous-famille de (a_1, \dots, a_n) (avec $1 \leq r \leq n$), ils sont eux aussi deux à deux premiers entre eux donc la question précédente s'applique et

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in b_k \mathbb{N}^*)\right) &= P(b_1 | X, \dots, b_r | X) \stackrel{\text{Q16}}{=} P(b_1 \cdots b_r | X) = P(X \in b_1 \cdots b_r \mathbb{N}^*) \\ &\stackrel{\text{Q15}}{=} \frac{1}{(b_1 \cdots b_r)^s} = \prod_{k=1}^r \frac{1}{b_k^s} \stackrel{\text{Q15}}{=} \prod_{k=1}^r P(X \in b_k \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

donc, par définition, $\boxed{\text{les } ([X \in a_k \mathbb{N}^*])_{k \in [1, n]}$ sont mutuellement indépendants.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*)$ par définition de B_n . Or les $([X \notin p_k \mathbb{N}^*])_{1 \leq k \leq n}$ sont mutuellement indépendants en tant que complémentaires des $([X \in p_k \mathbb{N}^*])_{1 \leq k \leq n}$ qui sont mutuellement indépendants d'après **Q17**.

Donc $\boxed{P(B_n) = \prod_{k=1}^n P(X \notin p_k \mathbb{N}^*) \stackrel{\text{Q15}}{=} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)}$.

Q19. Soit $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Alors $X(\omega)$ est un élément de \mathbb{N}^* divisible par aucun nombre premier : $\boxed{X(\omega) = 1}$, et la

réciproque est vraie. Donc $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Or $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Vu la question précédente, on obtient bien $\boxed{\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)}$.

Q20. On suppose par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_k}$ converge. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \sim \frac{1}{p_k}$ car $p_k \rightarrow +\infty$ (par exemple parce que $p_k \geq k$), par comparaison de séries à termes généraux positif, $\sum_k \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc, par continuité de l'exponentielle, on a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \rightarrow \ell$.

Soit $s > 1$. On a pour $k \in \mathbb{N}^*$, $1 < p_k \leq p_k^s$ donc $\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \geq 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, $\forall s > 1, \ell \geq \zeta(s)$.

Mais $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} +\infty$ d'après **Q13** et on obtient une contradiction.

C'est donc que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_k}$ diverge.

Fin du corrigé