

Contrôle a posteriori de l'Épreuve de Mathématiques C - Session 2017

Commentaires et pistes de correction par Philippe GUILHAUMON

Préambule

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point et soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I dont la dérivée f' est strictement croissante sur I . On suppose que $x_0 \in I$.

Commentaire . *peut-être aurait-on pu être plus précis sur la description de I . En particulier il semble qu'il aurait été préférable -mais pas obligatoire - de préciser que x_0 est dans l'intérieur de I .*

1. **Question de cours :** soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles qui est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors

$$\exists c \in]a, b[, (b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$$

2. Il s'agit d'appliquer la question précédente en choisissant $a = \min(x, x_0)$ et $b = \max(x, x_0)$ avec $a < b$ car $x \neq x_0$. L'hypothèse de continuité sur $[a, b]$ découle du caractère dérivable de f sur l'intervalle I - I n'est pas nécessairement ouvert - qui contient $[a, b]$ et la dérivabilité sur $]a, b[$ est directe.
3. Sous l'hypothèse $x < x_0$, d'après la question précédente, il existe un réel $c_{x, x_0} \in]x, x_0[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_{x, x_0}) < f'(x_0)$$

par stricte monotonie de la fonction f' ;

on obtient donc :

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$$

4. On tient un raisonnement très semblable à celui de la question précédente.
5. **Question de cours :** une équation cartésienne de la droite tangente $\mathcal{D}_{x_0}$ au graphe Γ_f de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

dans le repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$.

Commentaire . *vu la question, attendait-on plutôt une démonstration partant de la définition d'une droite tangente à une courbe plane régulière définie par une équation cartésienne ?*

6. Pour tout $x_0 \in I$, on a conjointement

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_{x_0}, y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

et

$$\forall x \in I, f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_{x_0}, (x \in I) \Rightarrow (f(x) \geq y)$$

Nous en déduisons que

$$\Gamma_f \text{ est contenu dans le demi-plan d'inéquation } y - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \text{ pour tout } x_0 \in I.$$

Partie I

1. Soit $x > 0$, on doit vérifier que $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente. par continuité de

$$f_x : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^x e^{-t} \end{cases}$$

Cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$.

D'une part, la fonction la fonction $\varphi : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \end{cases}$ étant intégrable (sur $[0, +\infty[$) la relation $f_x(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(e^{-\frac{t}{2}} \right)$ permet de conclure à l'intégrabilité de f_x sur $[0, +\infty[$ et à la convergence de $I_0 : \boxed{I_0 \text{ est convergente}}$.

2. Attendait-on que l'on dise

$$\forall t > 0, t^0 = 1$$

donc comme $\int_{[0, +\infty[} t^x e^{-t} dt = \int_{]0, +\infty[} t^x e^{-t} dt$ en mettant en évidence que l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ est équivalente - en nature et en valeur - à celle sur $]0, +\infty[$, on a pour $x = 0$:

$$G(0) = \int_{]0, +\infty[} e^{-t} dt = \int_{[0, +\infty[} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ avec les notations « permises » par le programme.

3. La fonction $f_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et l'application $\varphi : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ u \mapsto u^2 \end{cases}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement monotone. D'après le programme, nous en déduisons que vu la convergence de $G(\frac{1}{2})$, on a

$$G(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{u^2} e^{-u^2} 2u du = \int_0^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} du$$

Si on définit les deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ notées $U : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto -e^{-u^2} \end{cases}$ et $V : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto u \end{cases}$, le fait que $\lim_{u \rightarrow 0} U(u)V(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} U(u)V(u) = 0$, permet d'avoir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = I_0$$

Nous en déduisons que $\boxed{G(\frac{1}{2}) = I_0}$.

4. a. Soit $A > 0$ et soit $x \in [0, A]$, on peut envisager deux cas :

★ si $t \in]0, 1]$, $|t^x| \leq 1$

★ si $t \in [1, +\infty[$, $|t^x| \leq t^A$

Ainsi pour tout $x \in [0, A]$ et pour tout $t > 0$ on a $|t^x| \leq (1 + t^A)$ et la multiplication de cette inégalité par le réel $e^{-t} > 0$ permet de déduire que : $|t^x e^{-t}| \leq (1 + t^A) e^{-t}$

b. On met en oeuvre le théorème établissant la continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre dans la cas où le paramètre de l'intégrale est dans un segment.

On note $I =]0, +\infty[$ et $J = [0, A]$ et on définit la fonction $f : \begin{matrix} I \times J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & t^x e^{-t} = e^{x \ln(t) - t} \end{matrix}$ La continuité de la fonction de deux variables f s'établit par l'usage des opérations sur les fonctions continues du programme. De façon schématique, la somme, le produit et la composition de fonctions continues et composables, et la continuité de fonctions usuelles permettent de conclure que $f \in \mathcal{C}^0(I \times J, \mathbb{R})$. On pourrait résumer cela sous la forme synthétique suivante indiquant la décomposition en fonction continues utilisée :

$$\left. \begin{array}{l} (t, x) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} t > 0 \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \ln(t) \\ (t, x) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} x \\ (t, x) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} t \xrightarrow{\mathcal{C}^0} e^{-t} \end{array} \right\} (t, x) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} x \ln(t) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} e^{x \ln(t)} \left\} (x, t) \xrightarrow{\mathcal{C}^0} e^{x \ln(t) - t}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{C}^0(I \times J, \mathbb{R})$.

La condition de domination est assurée par la question précédente car :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [0, A], |f(t, x)| \leq (1 + t^A) e^{-t} = \varphi_0(t)$$

où φ_0 est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ du fait de sa continuité sur ce domaine d'une part, mais aussi car $|\varphi_0(t)| = \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}} \right)$. Nous en concluons que $G \in \mathcal{C}^0([0, A], \mathbb{R})$ pour tout $A > 0$.

c.

Commentaire . Il me semble que les concepteurs du sujet n'ont pas convenablement pris en compte que seule la version $\mathcal{C}^1$ est au programme. Il aurait donc probablement fallu qu'il y ait une formulation différente de cette question. Nous proposons une solution basée sur les seuls outils du programme.

Soit $k \in \mathbb{N}$, pour $x \in [0, A]$, on pose

$$g_k(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^x e^{-t} dt$$

On a le fait suivant :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k \in \mathcal{C}^1([0, A], \mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in [0, A], g'_k(x) = g_{k+1}(x)$$

Preuve : pour tout entier $k \geq 0$, on établit la classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction g_k de façon classique, la condition de domination se ramenant par exemple à :

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]0, A], |\ln(t)^{k+1} t^x e^{-t}| \leq (1 + t^A) |\ln(t)|^{k+1} e^{-t} = \varphi_k(t)$$

et l'intégrabilité de φ_k sur $]0, +\infty[$ est assurée par les arguments :

$$\star \text{ en } 0, \varphi_k(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} |\ln(t)|^{k+1} = \underset{t \rightarrow 0^+}{\circ} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \text{ avec } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \text{ qui est convergente.}$$

$$\star \text{ en } +\infty, \varphi_k(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{\circ} \left(e^{-\frac{t}{2}} \right) \text{ avec } \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt \text{ qui est convergente.}$$

Il s'ensuit que l'assertion de l'encadré ci-dessus est prouvée.

Nous déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_0 \in \mathcal{C}^{n+1}([0, A], \mathbb{R})$ car c'est une primitive n ième de la fonction $g_n \in \mathcal{C}^1([0, A])$, nous déduisons que $\boxed{g_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0, A]}$.

- d. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$, nous savons que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, x_0 + 1]$. Nous en déduisons que $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^+}$ car G possède en x_0 des dérivées à tous ordres. La reformulation de la question précédente permet aussi d'obtenir que

$$\forall x \geq 0, G^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^x e^{-t} dt$$

5. Pour tout $x \geq 0$,

$$(x+1)G(x) = \int_0^{+\infty} (x+1)t^x e^{-t} dt$$

Cependant du fait que $\lim_{x \rightarrow 0} t^{x+1} e^{-t} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t} = 0$, on obtient par intégration par parties basée sur des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ que :

$$(x+1) G(x) = \int_0^{+\infty} t^{x+1} e^{-t} = G(x+1)$$

6. On montre par récurrence que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, G(n) = n!$$

Pour cela, on pose $\mathcal{P}_k$ la propriété $\{G(k) = k!\}$

- ★ L'initialisation dépend de la vérification que $G(0) = 1 = 0!$
- ★ La supposition que $\mathcal{P}_k$ soit vraie implique la validité de la propriété au rang $k+1$ car $G(k+1) = (k+1)G(k)$ et l'hypothèse de récurrence faite au rang k permet de conclure.

7. On pose $\tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1}$ pour tout $x > -1$: les théorèmes généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ permettent rapidement d'établir que $\tilde{G}$ est de la classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine $] -1, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1} = \frac{(x+1)G(x)}{x+1} = G(x)$$

Nous concluons que $\tilde{G}$ prolonge la fonction G sur $] -1, +\infty[$.

8. La fonction G est continue à droite en 0 et $G(0) = 1 \neq 0$, nous en déduisons que $G(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} G(0) = 1$. Comme la relation d'équivalence est compatible avec la multiplication de fonctions et par composition à droite, nous déduisons que

$$\tilde{G}(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

9. Nous savons que $\tilde{G}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. La formule ci-dessus permet par dérivation d'obtenir que :

$$\tilde{G}'(x) = \frac{G'(x+1)}{(x+1)} - \frac{G(x+1)}{(x+1)^2} \text{ pour tout } x > -1. \text{ Cela donne en dérivant :}$$

$$\text{pour tout } x > -1, \tilde{G}''(x) = \frac{G''(x+1)}{(x+1)} - 2 \frac{G'(x+1)}{(x+1)^2} + 2 \frac{G(x+1)}{(x+1)^3}.$$

Enfin, pour tout $x > -1$, on a

$$(x+1)^3 \tilde{G}''(x) = \int_0^{+\infty} ((x+1)^2 \ln(t)^2 - 2(x+1) \ln(t) + 2) t^{x+1} e^{-t} dt$$

10. On a $X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1 \geq 1$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Donc pour tout $t > -1$, on a

$$((x+1)^2 \ln(t)^2 - 2(x+1) \ln(t) + 2) > 0$$

et par croissance de l'intégrale - dans le cas généralisé convergent - nous déduisons que $(x+1)^3 \tilde{G}''(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$. La continuité sur $]0, +\infty[$ et la stricte positivité de l'intégrande, indique que l'on ne peut avoir $(x+1)^3 \tilde{G}''(x) = 0$ et il s'ensuit que $\text{pour tout } x > -1, \tilde{G}''(x) > 0$.

11. D'après le préambule, nous pouvons dire que le graphe de $\Gamma_{\tilde{G}}$ est en tout point au dessus de sa tangente car $\tilde{G}'$ est strictement monotone.

12. On a $\tilde{G}(0) = G(1) = 1!$ d'après la question 6 et de même $\tilde{G}(1) = \frac{G(2)}{2} = \frac{2!}{2} = 1$: il en découle que $\tilde{G}(0) = \tilde{G}(1)$. D'après le préambule, ou par application du théorème de *Rolle* -étant donné la classe $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction à valeurs réelles $\tilde{G}$ sur $] -1, +\infty[$ - on peut conclure qu'il existe $c \in]0, 1[$, tel que $\tilde{G}'(c) = 0$.

Nous concluons qu'il existe un point $c \in]0, 1[$ la tangente au graphe de la fonction $\tilde{G}$ est donc horizontale.

13. Comme la fonction $\tilde{G}'$ est strictement croissante, nous pouvons affirmer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$
- * $x > c \Rightarrow \tilde{G}'(x) > \tilde{G}'(c) = 0$
 - * $x < c \Rightarrow \tilde{G}'(x) < \tilde{G}'(c) = 0$

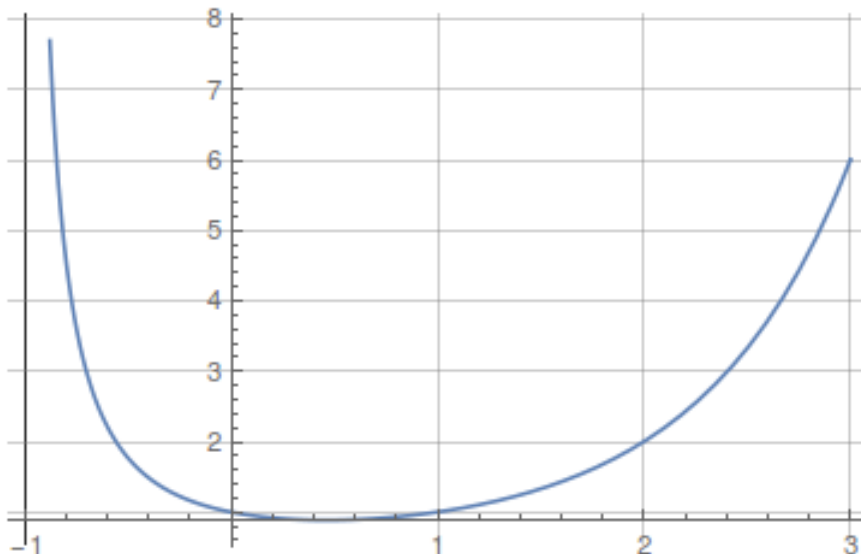
La question 8. indique que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \tilde{G}(x) = +\infty$.

Par ailleurs, comme $\tilde{G}$ est croissante sur $[1, +\infty[\subset]c, +\infty[$, on a l'inégalité

$$\forall x \geq 0, \tilde{G}(x) = \frac{G(x+1)}{x+1} \geq \frac{G(\lfloor x+1 \rfloor)}{x+1} = \frac{\lfloor x+1 \rfloor!}{x+1}$$

enfin, l'équivalence $\frac{\lfloor x+1 \rfloor!}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} [x]!$ nous amène à conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{G}(x) = +\infty$.

14.



Partie II

On pose $H(x) = \int_0^x e^{u^2} du$ et $F(x) = e^{-x^2} H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. D'après le théorème fondamental de l'intégration, vu que l'application $\left. \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{t^2} \end{array} \right\}$ est continue, la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le produit de deux fonctions dérivables sur le même intervalle restant dérivable, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Nous savons que l'on a l'identité

$$\forall z \in \mathbb{R}, e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ce qui donne

$$\forall u \in \mathbb{R}, e^{u^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{k!}$$

Ainsi la fonction $\left. \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & e^{u^2} \end{array} \right\}$ est développable en série entière et le rayon de convergence de son développement est $+\infty$. Par le théorème d'intégration terme à terme, nous pouvons écrire que pour

tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$H(x) = \int_0^x e^{u^2} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

La fonction H est donc développable en série entière et le rayon de convergence associé vaut $+\infty$. Enfin le produit de deux fonctions développables en série entière en 0 ayant des rayons de convergence infinis reste une fonction développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini, du fait de l'application ponctuelle d'un produit de *Cauchy* pour les séries entières.

Nous concluons que la fonction F est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence de sa série de *Taylor* vaut $+\infty$.

3. Les fonctions en jeu étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -2xe^{-x^2}H(x) + e^{-x^2}H'(x) = -2x \underbrace{e^{-x^2}H(x)}_{F(x)} + 1$$

4. Nous savons que la fonction F est une fonction impaire, développable en série entière en 0 et que le rayon de sa série de *Taylor* est infini. On peut donc trouver un développement en série entière de F en 0 de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

Par application du théorème de dérivation terme à terme, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1}x^{2k}$$

Si on place ces développements dans l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x) + 1$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1}x^{2k} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} -2a_{2k+1}x^{2k+2}$$

ce qui s'écrit par changement d'indice

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1}x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} -2a_{2k-1}x^{2k}$$

Par unicité du développement en série entière, nous déduisons les relations :

$$a_1 = 1$$

et

$$\forall k \geq 1, a_{2k+1} = \frac{-2}{2k+1}a_{2k-1}$$

ainsi

$$\forall n \geq 0, a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{\prod_{k=0}^n (2k+1)}$$

et on montre par récurrence que

$$\forall n \geq 0, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

7. Le rayon de convergence du développement en série entière de F est infini. La série de *Taylor* de F en $x = 1$ est donc convergente. Nous déduisons que la série proposée est convergente.
8. Nous avons évoqué à la question 2. la raison pour laquelle

$$\int_0^x e^{u^2} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

et par ailleurs nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^k k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Par unicité du développement en série entière en 0, et application de la formule issue du produit de *Cauchy* pour les séries entières en 0. On arrive à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)k!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(2k+1)n!} \times (-1)^{n-k}$$

ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(2k+1)} \times (-1)^k$$

et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^n}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

nous obtenons la formule voulue.