

Préambule

- a) Quand t tend vers $+\infty$, $\text{ch}(t) = \frac{e^t}{2}(1 + e^{-2t}) \sim \frac{e^t}{2}$ et de même $\text{sh}(t) = \frac{e^t}{2}(1 - e^{-2t}) \sim \frac{e^t}{2}$.
- b) $\text{ch}'(t) = \text{sh}(t) > 0$ pour $t > 0$ donc ch est croissante et positive sur $]0, +\infty[$; par suite g_1 est décroissante. $g_1(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_1(t) = 0$ (par comparaison de e^t et t).
- $\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ définit une fonction croissante et positive sur $[0, +\infty[$, avec $\varphi(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$; donc g_2 est décroissante, $\lim_{t \rightarrow 0} g_2(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_2(t) = 0$.

Partie I

I-1.1. Au voisinage de $+\infty$ on a $t^n e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ donc I_n existe.

I-1.2. En intégrant par parties:

$$\int_0^x t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^x + (n+1) \int_0^x t^n e^{-t} dt = 1 - x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

I-1.3. $\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$ donc $I_0 = 1$.

On montre par récurrence que $I_n = n!$. C'est bien vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n alors on déduit que $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$: c'est vrai aussi pour $n+1$.

I-1.4. Effectuons le changement de variable défini par $u = \alpha t$ (cela définit bien une bijection de classe C^1 de $[0, +\infty[$ dans lui-même): $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

I-2.1. Pour $t \geq 0$ on a $0 \leq e^{-t} \leq e^t$ donc $\frac{e^t}{2} \leq \text{ch}(t) \leq e^t$.

I-2.2. L'encadrement précédent entraîne que $t^n e^{-t} \leq \frac{t^n}{\text{ch}(t)} \leq 2t^n e^{-t}$ donc C_n existe et $I_n \leq C_n \leq 2I_n$, d'où $1 \leq \frac{C_n}{I_n} \leq 2$.

I-2.3. On a $\frac{d}{dt}(\arctan(e^t)) = \frac{e^t}{1+e^{2t}} = \frac{1}{2\text{ch}(t)}$ donc $\int_0^x \frac{1}{\text{ch}(t)} dt = 2(\arctan(e^x) - \frac{\pi}{4})$ et en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $C_0 = \frac{\pi}{2}$.

I-2.4. $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-2t})^k e^{-t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} = \frac{1}{2\text{ch}(t)}$ car c'est une série géométrique de raison $r = -e^{-2t}$ (avec $|r| < 1$) et de premier terme e^{-t} .

I-2.5. $C_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 2t^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} dt$. Posons $f_k(t) = 2t^n (-1)^k e^{-(2k+1)t}$.

- f_k est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$: d'après le I-1.4. on a $\int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = 2 \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$.
- La série de fonctions $(\sum f_k)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\text{ch}(t)}$).
- La série de terme général $u_k = \int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = 2 \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ converge pour $n \geq 1$ puisque $u_k \sim \frac{C}{k^{n+1}}$ terme général d'une série de Riemann convergente.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme qui donne bien le résultat attendu.

I-2.6. Pour justifier l'égalité quand $n = 0$ on peut utiliser le DSE $\arctan(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1}$ de rayon de convergence égal à 1. Comme la série converge pour $t = 1$ (par le théorème des séries alternées) on en déduit (par le cours de PC) que sa somme est égale à $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et on retrouve bien $C_0 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

I-3.1. Puisque $\frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)} \sim t^{n-1}$ au voisinage de 0, la fonction se prolonge par continuité en 0 ($n \geq 1$).

$\frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)} \sim \frac{2t^n}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ donc S_n existe.

I-3.2. $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-2t})^k e^{-t} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = \frac{1}{2\operatorname{sh}(t)}$ car c'est une série géométrique de raison $r = e^{-2t}$ (avec $|r| < 1$) et de premier terme e^{-t} .

I-3.3. $S_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 2t^n e^{-(2k+1)t} dt$. Posons $g_k(t) = 2t^n e^{-(2k+1)t}$.

– g_k est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$: d'après le I-1.4. on a $\int_0^{+\infty} |g_k(t)| dt = 2 \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$.

– La série de fonctions $(\sum g_k)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)}$).

– La série de terme général $v_k = \int_0^{+\infty} |g_k(t)| dt = 2 \frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$ converge pour $n \geq 1$ puisque $v_k \sim \frac{C}{k^{n+1}}$ terme général d'une série de Riemann convergente.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme qui donne bien le résultat attendu.

I-4.1. Puisque φ est impaire, $b_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$. Donc $b_{2k} = 0$,
 $b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$.

I-4.2. La fonction φ est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux: sa série de Fourier converge simplement vers φ puisque $\varphi(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} \varphi(t) \right) = 0$ et de même en π .

On en déduit: $1 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4 \sin((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)\pi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}$ qui redonne bien $C_0 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

La formule de Parseval donne $1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(t)^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n(\varphi)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{16}{((2k+1)\pi)^2}$ d'où l'on déduit
 $S_1 = 2\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$.

Partie II

II-1.1. On applique le théorème de Leibniz en posant $f(x, t) = \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}$.

– Les applications $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{ite^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}$ sont continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ car

$|f(x, t)| = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ et $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| = \frac{t}{\operatorname{ch}(t)}$ qui sont intégrables puisque C_n existe (question I-2.2.).

– L'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 .

– $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| = \frac{t}{\operatorname{ch}(t)} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0, +\infty[$.

F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{ite^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)} dt$.

II-1.2. Pour tout x réel, $e^{ixt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ixt)^n}{n!}$ donc $F(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) dt$ en posant $h_n(t) = \frac{(ixt)^n}{n! \operatorname{ch}(t)}$.

- h_n est une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ (puisque $|h_n(t)| = \frac{(|x|t)^n}{n! \operatorname{ch}(t)}$ et que C_n existe).
- La série de fonctions $(\sum h_n)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ (sa somme est la fonction $t \mapsto \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}$).
- La série de terme général $w_n = \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} C_n$ converge pour $|x| < 1$ puisque $C_n \leq 2I_n = 2n!$ entraîne que $w_n \leq 2|x|^n$ terme général d'une série convergente.

On en déduit que l'on peut intégrer terme à terme et que $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} C_n$.

Le rayon de convergence est égal à 1 puisque pour $x = 1$, $\left| \frac{(ix)^n}{n!} C_n \right| = \frac{C_n}{n!} \geq 1$ puisque $C_n \geq I_n = n!$.

II-1.3. Pour $a > 0$, $\int_0^a \frac{ix e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)} dt = \left[\frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)} \right]_0^a + \int_0^a \frac{e^{ixt} \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} dt$. On peut faire tendre a vers $+\infty$ puisque $\left| \frac{e^{ixt} \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On obtient $ixF(x) = -1 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} dt$ d'où $|xF(x)| \leq 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)^2} dt = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

II-2.1. Pour $t > 0$ on peut calculer la somme partielle de la série géométrique du I-2.4.: $\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} = \sum_{k=0}^n (-e^{-2t})^k e^{-t} = \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} (1 - (-e^{-2t})^{n+1})$ d'où $\left| \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| = \frac{e^{-(2n+3)t}}{2\operatorname{ch}(t)} \leq e^{-(2n+3)t}$ puisque $2\operatorname{ch}(t) \geq e^t$.

II-2.2. En multipliant par $2 \cos(xt)$ et en intégrant sur $[0, +\infty[$ (chaque fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ et c'est une somme finie) on obtient, puisque le module d'une intégrale est majoré par l'intégrale du module:

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^n 2(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} |\cos(xt)| dt \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt.$$

II-2.3. $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-(2k+1))t} dt \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(ix-(2k+1))t}}{ix - (2k+1)} \right]_0^{+\infty} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(2k+1) - ix} \right) = \frac{2k+1}{(2k+1)^2 + x^2}.$

II-2.4. Puisque $2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt = \left[\frac{2e^{-(2n+3)t}}{-(2n+3)} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{2n+3}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient bien que $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$

II-3.1. La fonction h_x est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux: sa série de Fourier converge simplement vers h_x puisque $h_x(\pi) = h_x(-\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow \pi^+} h_x(t) + \lim_{t \rightarrow \pi^-} h_x(t) \right) = 0$.

II-3.2. Puisque h_x est impaire:

$$b_n(h_x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\pi (e^{(x+ni)t} - e^{(-x+ni)t}) dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{(x+ni)t}}{x+ni} + \frac{e^{(-x+ni)t}}{x-ni} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{(-1)^n e^{x\pi} - 1}{x+ni} + \frac{(-1)^n e^{-x\pi} - 1}{x-ni} \right) = \frac{-n((-1)^n e^{x\pi} - 1) + n((-1)^n e^{-x\pi} - 1)}{\pi(x^2 + n^2)} = \frac{-2n(-1)^n \operatorname{sh}(x\pi)}{\pi(x^2 + n^2)}.$$

II-3.3. Pour $t = \frac{\pi}{2}$ on obtient $h_x(\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sh}(\frac{x\pi}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(h_x) \sin(n\frac{\pi}{2})$. Or $\sin(n\frac{\pi}{2})$ est nul quand n est pair et vaut

$$(-1)^k \text{ quand } n = 2k+1. \text{ On a donc } \operatorname{sh}(\frac{x\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k b_{2k+1}(h_x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1) \operatorname{sh}(x\pi)}{\pi(x^2 + (2k+1)^2)}. \text{ Avec } \operatorname{sh}(x\pi) = 2\operatorname{sh}(\frac{x\pi}{2})\operatorname{ch}(\frac{x\pi}{2}) \text{ on obtient bien } H(x) = \frac{\pi}{2\operatorname{ch}(\frac{x\pi}{2})}.$$

Partie III

III-1. Les solutions de $y'' = y$ sont bien connues: $y = \lambda \operatorname{ch} + \mu \operatorname{sh}$.

III-2.1. Utilisons la méthode de variation des constantes. Cela revient à poser $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{pmatrix}$ qui conduit au système: $\lambda' \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\operatorname{ch}} \end{pmatrix}$. En inversant la matrice du système on obtient $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} & -\operatorname{sh} \\ -\operatorname{sh} & \operatorname{ch} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\operatorname{ch}} \end{pmatrix}$ d'où $\mu' = 1$ et $\lambda' = -\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$. On en déduit $\mu(t) = t + b$ et $\lambda(t) = -\ln(\operatorname{ch}(t)) + a$ et enfin la solution générale $y(t) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + a \operatorname{ch}(t) + b \operatorname{sh}(t)$.

III-2.2. On a obtenu y comme somme d'une fonction paire $t \mapsto t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + a \operatorname{ch}(t)$ (qui n'est jamais la fonction nulle) et d'une fonction impaire $t \mapsto b \operatorname{sh}(t)$. Elle ne peut donc pas être impaire.

III-2.3. y est paire si et seulement si $b = 0$. Elle vérifie $y(0) = 1$ si et seulement si $a = 1$. Il y a donc une unique fonction θ définie par $\theta(t) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + \operatorname{ch}(t)$.

III-3.1. Le DSE de ch est connu: $a_k = \frac{1}{(2k)!}$.

III-3.2. Puisque $a_0 = 1$ on a $b_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}$ donc la suite (b_n) est définie de manière unique par récurrence.

III-3.3. $b_0 = 1$, $b_1 = -b_0 a_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = -b_0 a_2 - b_1 a_1 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$.

III-3.4. $|b_0| = 1$. Supposons $|b_k| \leq 1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

On en déduit $|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| a_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = \operatorname{ch}(1) - 1 \leq 1$ puisque $\operatorname{ch}(1) \leq 2$. On a montré la propriété pour n . L'inégalité est démontrée par récurrence.

III-3.5. $|b_n t^{2n}| \leq t^{2n}$ donc la série définissant $g(t)$ converge absolument pour $|t| < 1$.

Pour $|t| < 1$ la série entière produit de Cauchy des deux séries $(\sum a_n t^{2n})$ et $(\sum b_n t^{2n})$ converge. Son terme général est donné par $c_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = 0$ si $n \geq 1$ et $c_0 = a_0 b_0 = 1$. On en déduit que $\operatorname{ch}(t)g(t) = 1$ pour $|t| < 1$.

III-4.1. Pour $|t| < 1 \leq R$ on peut écrire $f''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)u_n t^{2n-2}$. Après avoir changé n en $n+1$ on obtient par unicité des coefficients d'un DSE: $(2n+2)(2n+1)u_{n+1} - u_n = b_n$.

III-4.2. Puisque $u_0 = 1$ la suite (u_n) est définie de manière unique par récurrence.

On a $|u_0| = 1$. Supposons $|u_n| \leq 1$. On en déduit $|u_{n+1}| = \frac{|u_n + b_n|}{(2n+2)(2n+1)} \leq \frac{2}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ puisque $|u_n| \leq 1$ et $|b_n| \leq 1$. On a démontré la majoration par récurrence.

III-4.3. Définissons la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + b_n}{(2n+2)(2n+1)}$. Puisqu'elle vérifie $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$ la série entière définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ a un rayon de convergence

$R \geq 1$. La fonction f vérifie alors $f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ d'après le calcul fait au III-4.1.

De plus $f(0) = u_0 = 1$ et f est paire. f est donc égale à l'unique solution de S , paire et telle que $f(0) = 1$, donc $f = \theta$. On a bien montré que θ possède un DSE sur $] -1, 1[$.

III-4.4. Puisque $\theta(t) = t \operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t) \ln(\operatorname{ch}(t)) + \operatorname{ch}(t)$ on déduit pour $|t| < 1$: $\ln(\operatorname{ch}(t)) = g(t)(t \operatorname{sh}(t) - \theta(t)) + 1$. comme les fonctions g , sh et θ possèdent un DSE sur $] -1, 1[$ on en déduit que $\psi : t \mapsto \ln(\operatorname{ch}(t))$ possède un DSE sur $] -1, 1[$ (car le produit de deux fonctions ayant un DSE possède aussi un DSE).

Remarque: une démonstration plus rapide consiste à dire que $\psi'(t) = \operatorname{sh}(t)g(t)$ possède un DSE sur $] -1, 1[$ donc ψ aussi.